Autovalores e autovetores

Definição e exemplos

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Autovalores e Autovetores

Sejam V espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear. Procuramos vetores $v \in V$ tais que

$$T(v) = \lambda\, v, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Se $v = 0$ temos $T(v) = 0 = \lambda\, .0$ (Sempre).

Vamos procurar vetores $v \neq 0$ satisfazento (1).

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} I: \quad V &\to V \\ v &\to v \end{aligned}$$

Todo vetor $v \neq 0$ é tal que $I(v) = v = 1.v$, com $\lambda = 1$.

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (2x, -y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda x \\ -y & \ \lambda y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 2)x &= 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ ou } x = 0 \\ (\lambda + 1)y &= 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ ou } y = 0 \end{aligned}$$

Autovetores:

- $x = 0$ (eixo y) $\Rightarrow T(0, y) = (0, -y) = -1(0, y)$ com $\lambda = -1$ e $\{(0, y), y \neq 0\}$
- $y = 0$ (eixo x) $\Rightarrow T(x, 0) = (2x, 0) = 2(x, 0)$ com $\lambda = 2$ e $\{(x, 0), x \neq 0\}$

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Um vetor $v \neq 0$ em V é um **autovetor** *(vetor próprio) se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$T(v) = \lambda\, v$$

Neste caso λ é chamado autovalor (ou valor próprio) de T.

Exemplo 3.

$$
\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\to (8x, 8y)
\end{aligned}
$$

Todo $(x, y) \neq (0, 0)$ é autovetor de T associado ao autovalor 8.

Mais geralmente,

$$
\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\to (\lambda x, \lambda y)
\end{aligned}
$$

Todo $(x, y) \neq (0, 0)$ é autovetor de T associado ao autovalor λ.

- $\lambda < 0 \Rightarrow T$ inverte o sentido do vetor
- $|\lambda| > 1 \Rightarrow T$ dilata o vetor
- $|\lambda| < 1 \Rightarrow T$ contrai o vetor
- $\lambda = 1 \Rightarrow T$ é o operador identidade
- $\lambda = 0 \Rightarrow T$ é a aplicação nula.

Exemplo 3.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

Todo $(x, y) \neq (0, 0)$ é autovetor de T associado ao autovalor 8.

Mais geralmente,

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Todo $(x, y) \neq (0, 0)$ é autovetor de T associado ao autovalor λ.

- $\lambda < 0 \Rightarrow T$ inverte o sentido do vetor
- $|\lambda| > 1 \Rightarrow T$ dilata o vetor
- $|\lambda| < 1 \Rightarrow T$ contrai o vetor
- $\lambda = 1 \Rightarrow T$ é o operador identidade
- $\lambda = 0 \Rightarrow T$ é a aplicação nula.

Exemplo 4.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (2x + 2y, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lambda(x, y) \\ (2x + 2y, y) &= \lambda(x, y) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \lambda x \\ y &= \lambda y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)y &= 0 \\ \lambda &= 1 \text{ ou } y = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 4.

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (2x + 2y, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lambda(x, y) \\ (2x + 2y, y) &= \lambda(x, y) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \lambda x \\ y &= \lambda y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)y &= 0 \\ \lambda &= 1 \text{ ou } y = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 4.

$$
\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\to (2x + 2y, y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(x, y) &= \lambda(x, y) \\
(2x + 2y, y) &= \lambda(x, y)
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
2x + 2y &= \lambda x \\
y &= \lambda y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda - 1)y &= 0 \\
\lambda &= 1 \text{ ou } y = 0
\end{aligned}
$$

- Se $y \neq 0$ então $\lambda = 1$ e $2x + 2y = x$

  Autovalor $\lambda = 1$. Autovetores associados a $\lambda = 1$ são $\{(-2y, y), y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
- Se $y = 0$ então $x \neq 0$ ($v \neq 0$)

  $2x + 0 = \lambda x$ e $(\lambda - 2)x = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 2$

  Autovalor $\lambda = 2$. Autovetores associados a $\lambda = 2$ são $\{(x, 0), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

Observação: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $v \in V$

$$\begin{aligned} T(v) = \lambda v \iff & \quad T(v) - \lambda v = 0 \\ \iff & \quad T(v) - \lambda I(v) = 0 \\ \iff & \quad (T - \lambda I)(v) = 0 \\ \iff & \quad v \in N(T - \lambda I) \end{aligned}$$

Logo, $\{v \in V, \ T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$ é um subespaço vetorial de V.

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T; o subespaço de V

$$V_\lambda = \{v \in V / \ T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$$

é chamado **autoespaço associado ao autovalor** λ *ou espaço próprio associado a λ.*

Exemplo (voltando ao exemplo 4.)

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to (2x + 2y, y) \end{aligned}$$

- Autovalor $\lambda = 1$. Autovetores associados $\{(-2y, y), y \neq 0\}$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 0) : y \in \mathbb{R}\} = [(-2, 0)] \end{aligned}$$

- Autovalor $\lambda = 2$. Autovetores associados a $\lambda = 2$ $\{(x, 0), x \neq 0\}$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0)] \end{aligned}$$

- Autovalor $\lambda = 1$. Autovetores associados $\{(-2y, y), y \neq 0\}$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 0) : y \in \mathbb{R}\} = [(-2, 0)] \end{aligned}$$

- Autovalor $\lambda = 2$. Autovetores associados a $\lambda = 2$ $\{(x, 0), x \neq 0\}$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0)] \end{aligned}$$

Observação: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V e B base de V. Dado $v \in V$,

$$\begin{aligned} T(v) = \lambda v \iff & \quad [T]_{B,B}[v]_B - \lambda[v]_B = 0 \\ \iff & \quad ([T]_{B,B} - \lambda I)\ [v]_B = 0 \end{aligned}$$

Logo, o autoespaço associado a λ pode ser descrito como

$$V_\lambda = \{v \in V,\ ([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B\} = 0.$$

Se $[T]_{B,B} = [a_{ij}]$ e $[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é um sistema linear homogêneo com n equações e n incógnitas. Temos duas possibilidades:

- det(matriz dos coef) $\neq 0 \Rightarrow$ sistema possível determinado
- det(matriz dos coef) $= 0 \Rightarrow$ sistema possível indeterminado.

Se $[T]_{B,B} = [a_{ij}]$ e $[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é um sistema linear homogêneo com n equações e n incógnitas. Temos duas possibilidades:

- det(matriz dos coef) $\neq 0 \Rightarrow$ sistema possível determinado
- det(matriz dos coef) $= 0 \Rightarrow$ sistema possível indeterminado.

Observações

- Assim, se $det([T]_{B,B} - \lambda I) \neq 0$ então o sistema só tem uma solução $v = x_1 = ... = x_n = 0$ e portanto não há autovetores associados a λ.
- Estamos interessados nos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $det([T]_{B,B} - \lambda I) = 0$. Nestes casos o sistema tem solução não trivial e portanto λ é autovalor.
- Note que $det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é um polinômio em λ!!

Observações

- Assim, se $det([T]_{B,B} - \lambda I) \neq 0$ então o sistema só tem uma solução $v = x_1 = ... = x_n = 0$ e portanto não há autovetores associados a λ.
- Estamos interessados nos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $det([T]_{B,B} - \lambda I) = 0$. Nestes casos o sistema tem solução não trivial e portanto λ é autovalor.
- Note que $det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é um polinômio em λ!!

Observações

- Assim, se $det([T]_{B,B} - \lambda I) \neq 0$ então o sistema só tem uma solução $v = x_1 = ... = x_n = 0$ e portanto não há autovetores associados a λ.
- Estamos interessados nos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $det([T]_{B,B} - \lambda I) = 0$. Nestes casos o sistema tem solução não trivial e portanto λ é autovalor.
- Note que $det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é um polinômio em λ!!

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. B uma base de V.

O polinômio catacterístico de T *é o polinômio de grau n*

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$$

As raízes de $P_T(\lambda)$ são os autovalores de T.

Se $[T]_{B,B} = [a_{ij}]$, então

$$P_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Definição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em V. B uma base de V.

O polinômio catacterístico de T *é o polinômio de grau n*

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$$

As raízes de $P_T(\lambda)$ são os autovalores de T.

Se $[T]_{B,B} = [a_{ij}]$, então

$$P_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (y,x) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (8x,8y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \text{ det } \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \text{ det } \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \text{ det } \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (8x, 8y) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \text{ det } \begin{bmatrix} 8 - \lambda & 0 \\ 0 & 8 - \lambda \end{bmatrix} = (8 - \lambda)^2$$

Queremos mostrar que $P_T(\lambda)$ não depende da base de V escolhida!

Proposição

Se B e C são duas bases para V e $T : V \to V$ é um operador linear em V então $det([T]_{B,B} - \lambda I) = det([T]_{C,C} - \lambda I)$.

Demonstração: $[T]_{C,C} = M_{BC}[T]_{B,B}M_{BC}^{-1}$

$$\begin{aligned}
det([T]_{C,C} - \lambda I) &= det(M_{BC}[T]_{B,B}M_{BC}^{-1} - \lambda I) \\
&= det(M_{BC}[T]_{B,B}M_{BC}^{-1} - \lambda M_{BC}\; I\; M_{BC}^{-1}) \\
&= det(M_{BC}([T]_{B,B} - \lambda\; I)\; M_{BC}^{-1}) \\
&= detM_{BC}det([T]_{B,B} - \lambda\; I) \det M_{BC}^{-1}) \\
&= det([T]_{B,B} - \lambda I)
\end{aligned}$$

Observação: A proposição anterior garante que o polinômio característico está bem definido (ele não depende da base escolhida).

$$\begin{aligned} \lambda \text{ é autovalor de } T &\iff \text{Existe } v \neq 0 \text{ tal que } T(v) = \lambda v \\ &\iff det([T]_{B,B} - \lambda I) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ é raiz de } P_T(\lambda) \end{aligned}$$

Os autovetores associados a λ são os vetores $v \neq 0$ tal que $([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B\} = 0$

Observação: A proposição anterior garante que o polinômio característico está bem definido (ele não depende da base escolhida).

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ é autovalor de } T \iff & \text{ Existe } v \neq 0 \text{ tal que } T(v) = \lambda v \\
\iff & \quad det([T]_{B,B} - \lambda I) = 0 \\
\iff & \quad \lambda \text{ é raiz de } P_T(\lambda)
\end{aligned}
$$

Os autovetores associados a λ são os vetores $v \neq 0$ tal que $([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B\} = 0$

Voltando ao Exemplo 1.

Encontre os autovalores e autovetores de

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (y,x) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Voltando ao Exemplo 1.

Encontre os autovalores e autovetores de

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (y, x) \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \Longleftrightarrow \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$: $(x, y) \neq (0,0)$ com $x = y$ tal que $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$: $(x, y) \neq (0,0)$ com $x = -y$ tal que $([T] - (-1)I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$: $(x, y) \neq (0, 0)$ com $x = y$ tal que $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$: $(x, y) \neq (0, 0)$ com $x = -y$ tal que $([T] - (-1)I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$: $(x, y) \neq (0, 0)$ com $x = y$ tal que $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$: $(x, y) \neq (0, 0)$ com $x = -y$ tal que $([T] - (-1)I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = 1$: $(x, y) \neq (0,0)$ com $x = y$ tal que $([T] - I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$$

Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$: $(x, y) \neq (0,0)$ com $x = -y$ tal que $([T] - (-1)I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$$

Voltando ao Exemplo 2.

Encontre os autovalores e autovetores de

$$
\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\to (8x, 8y)
\end{aligned}
$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(8-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

Voltando ao Exemplo 2.

Encontre os autovalores e autovetores de

$$
\begin{aligned}
T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x,y) &\to (8x, 8y)
\end{aligned}
$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (8-\lambda)^2$$

Autovalores: λ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$

$$(8-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$: $(x, y) \neq (0, 0)$ com tal que $([T] - 8I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovetores: $\{v \neq 0 : v \in \mathbb{R}^2\}$ e o autoespaço associado a $\lambda = 8$:

$$V_8 = \mathbb{R}^2.$$

Autovetores associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$: $(x, y) \neq (0, 0)$ com tal que $([T] - 8I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovetores: $\{v \neq 0 : v \in \mathbb{R}^2\}$ e o autoespaço associado a $\lambda = 8$:

$$V_8 = \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 3.

Encontre os autovalores e autovetores de

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (-y, x). \end{aligned}$$

Como $[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Note que $P_T(\lambda)$ não tem raizes reais. Portanto T não tem autovalores reais.

Exemplo 3.

Encontre os autovalores e autovetores de

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (-y, x). \end{aligned}$$

Como $[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Note que $P_T(\lambda)$ não tem raizes reais. Portanto T não tem autovalores reais.