# Diagonalização de Operadores Lineares

## Definição e exemplos

**Álgebra Linear**

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

## Aula passada

Sejam $V$ espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear, $B$ base para $V$.

- $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de $T$.
- $\lambda$ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$
- Autovetores associados a $\lambda$: $v \neq 0$, $([T]_{B,B} - \lambda I)[v[_B = 0$

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Aula passada

Sejam $V$ espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear, $B$ base para $V$.

- $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de $T$.
- $\lambda$ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$
- Autovetores associados a $\lambda$: $v \neq 0$, $([T]_{B,B} - \lambda I)[v[_B = 0$

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Aula passada

Sejam $V$ espaço vetorial, $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear, $B$ base para $V$.

- $P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I)$ é o polinômio caracteristico de $T$.
- $\lambda$ é autovalor de $T \iff \lambda$ é raiz de $P_T(\lambda)$
- Autovetores associados a $\lambda$: $v \neq 0$, $([T]_{B,B} - \lambda I)[v[_B= 0$

$$([T]_{B,B} - \lambda I)[v]_B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dizemos que $T$ é diagonalizável se existe uma base $B$ de $V$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal.
- $T$ é diagonalizável $\Longleftrightarrow$ $V$ admite uma base formada por autovetores de $T$.
- Quando $T$ é diagonalizável, a base $B$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal é a base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de autovetores

$$\begin{array}{ll} v_1 & \text{associado a } \lambda_1 \\ v_2 & \text{associado a } \lambda_2 \\ \vdots & \\ v_n & \text{associado a } \lambda_n \end{array}$$

- Dizemos que $T$ é diagonalizável se existe uma base $B$ de $V$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal.
- $T$ é diagonalizável $\iff$ $V$ admite uma base formada por autovetores de $T$.
- Quando $T$ é diagonalizável, a base $B$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal é a base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de autovetores

$$\begin{array}{ll} v_1 & \text{associado a } \lambda_1 \\ v_2 & \text{associado a } \lambda_2 \\ \vdots & \\ v_n & \text{associado a } \lambda_n \end{array}$$

- Dizemos que $T$ é diagonalizável se existe uma base $B$ de $V$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal.
- $T$ é diagonalizável $\iff$ $V$ admite uma base formada por autovetores de $T$.
- Quando $T$ é diagonalizável, a base $B$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal é a base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de autovetores

$$\begin{array}{ll} v_1 & \text{associado a } \lambda_1 \\ v_2 & \text{associado a } \lambda_2 \\ \vdots & \\ v_n & \text{associado a } \lambda_n \end{array}$$

- Dizemos que $T$ é diagonalizável se existe uma base $B$ de $V$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal.
- $T$ é diagonalizável $\iff$ $V$ admite uma base formada por autovetores de $T$.
- Quando $T$ é diagonalizável, a base $B$ tal que $[T]_{B,B}$ é diagonal é a base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de autovetores

$$\begin{array}{ll} v_1 & \text{associado a } \lambda_1 \\ v_2 & \text{associado a } \lambda_2 \\ \vdots & \\ v_n & \text{associado a } \lambda_n \end{array}$$

## Exemplo

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$T(1,0,0) = (2,0,0)$
$T(0,1,0) = (2,1,2)$
$T(0,0,1) = (3,2,1)$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$T(1,0,0) = (2,0,0)$
$T(0,1,0) = (2,1,2)$
$T(0,0,1) = (3,2,1)$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$T(1,0,0) = (2,0,0)$
$T(0,1,0) = (2,1,2)$
$T(0,0,1) = (3,2,1)$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$T(1,0,0) = (2,0,0)$

$T(0,1,0) = (2,1,2)$

$T(0,0,1) = (3,2,1)$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$P_T(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = 0$$

$\lambda = 2$ ou

$$[(1-\lambda)^2 - 4] = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$\lambda = \frac{2 \mp \sqrt{4+12}}{2}$ então $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

Autovalores:

$\lambda = 2$

$\lambda = 3$

$\lambda = -1$

$$P_T(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = 0$$

$\lambda = 2$ ou

$$[(1-\lambda)^2 - 4] = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$\lambda = \frac{2 \mp \sqrt{4+12}}{2}$ então $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

Autovalores:

$\lambda = 2$

$\lambda = 3$

$\lambda = -1$

$\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 2$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$ Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_2 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(2) = 1$

$\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 2$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$ Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_2 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(2) = 1$

$\lambda = 2$ $ma(2) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 2$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 2I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0$ e $z = 0$ Autovetor $\{(x, 0, 0), x \neq 0\}$

$$V_2 = \{(x, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

$mg(2) = 1$

$\lambda = -1$ $ma(-1) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_2 = -1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque

$([T] + 1I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x + 2y + 3z = 0$

$2y + 2z = 0$

$z = -y$ e $y = 3x$, $z = -3x$

Autovetores $\{(x, 3x, -3x), x \neq 0\}$

$$V_{-1} = \{(x, 3x, -3x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 3, -3)]$$

$mg(-1) = 1$

$\lambda = -1$ $ma(-1) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_2 = -1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque

$([T] + 1I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x + 2y + 3z = 0$

$2y + 2z = 0$

$z = -y$ e $y = 3x$, $z = -3x$

Autovetores $\{(x, 3x, -3x), x \neq 0\}$

$$V_{-1} = \{(x, 3x, -3x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 3, -3)]$$

$mg(-1) = 1$

$\lambda = -1$ $ma(-1) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_2 = -1$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque

$([T] + 1I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x + 2y + 3z = 0$

$2y + 2z = 0$

$z = -y$ e $y = 3x$, $z = -3x$

Autovetores $\{(x, 3x, -3x), x \neq 0\}$

$$V_{-1} = \{(x, 3x, -3x),\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, 3, -3)]$$

$mg(-1) = 1$

$\lambda = 3$ $ma(3) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_3 = 3$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 3I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + 2y + 3z = 0$

$-2y + 2z = 0$

$z = y$ e $x = 5y$

Autovetores $\{(5y, y, y), y \neq 0\}$

$$V_3 = \{(5y, y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(5, 1, 1)]$$

$mg(3) = 1$

$\lambda = 3$ $ma(3) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_3 = 3$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 3I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + 2y + 3z = 0$

$-2y + 2z = 0$

$z = y$ e $x = 5y$

Autovetores $\{(5y, y, y), y \neq 0\}$

$$V_3 = \{(5y, y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(5, 1, 1)]$$

$mg(3) = 1$

$\lambda = 3$ $ma(3) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_3 = 3$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque $([T] - 3I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + 2y + 3z = 0$

$-2y + 2z = 0$

$z = y$ e $x = 5y$

Autovetores $\{(5y, y, y), y \neq 0\}$

$$V_3 = \{(5y, y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(5, 1, 1)]$$

$mg(3) = 1$

Autovalores: $2, -1, 3$

- (1,0,0) é autovetor associado a 2
- (1,3,-3) é autovetor associado a -1
- (5,1,1) é autovetor associado a 3

$B = \{(1,0,0),(1,3,-3),(5,1,1)\}$ base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T$ é diagonalizável.

Autovalores: $2, -1, 3$

- (1,0,0) é autovetor associado a 2
- (1,3,-3) é autovetor associado a -1
- (5,1,1) é autovetor associado a 3

$B = \{(1,0,0),(1,3,-3),(5,1,1)\}$ base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T$ é diagonalizável.

Autovalores: $2, -1, 3$

- (1,0,0) é autovetor associado a 2
- (1,3,-3) é autovetor associado a -1
- (5,1,1) é autovetor associado a 3

$B = \{(1,0,0), (1,3,-3), (5,1,1)\}$ base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T$ é diagonalizável.

Autovalores: $2, -1, 3$

- (1,0,0) é autovetor associado a 2
- (1,3,-3) é autovetor associado a -1
- (5,1,1) é autovetor associado a 3

$B = \{(1,0,0), (1,3,-3), (5,1,1)\}$ base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T$ é diagonalizável.

Autovalores: $2, -1, 3$

- (1,0,0) é autovetor associado a 2
- (1,3,-3) é autovetor associado a -1
- (5,1,1) é autovetor associado a 3

$B = \{(1,0,0), (1,3,-3), (5,1,1)\}$ base de autovetores

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T$ é diagonalizável.

## Observação:

Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em $V$. Se $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são dois autovalores distintos de $T$, $v_1$ é autovetor associado a $\lambda_1$ e $v_2$ é autovetor associado a $\lambda_2$, então $\{v_1, v_2\}$ é LI.

Vamos estudar, então, a equação $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. Segue-se desta equação que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \tag{1}$$

$$\alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_1 v_2 = 0 \tag{2}$$

$$\alpha \lambda_2 v_1 + \beta \lambda_2 v_2 = 0 \tag{3}$$

$$\alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_1 v_2 = 0 \tag{4}$$

## Observação:

Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em $V$. Se $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são dois autovalores distintos de $T$, $v_1$ é autovetor associado a $\lambda_1$ e $v_2$ é autovetor associado a $\lambda_2$, então $\{v_1, v_2\}$ é LI.

Vamos estudar, então, a equação $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. Segue-se desta equação que

$$
\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 &= 0 && (1)\\
\alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_1 v_2 &= 0 && (2)\\
\alpha \lambda_2 v_1 + \beta \lambda_2 v_2 &= 0 && (3)\\
\alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_1 v_2 &= 0 && (4)
\end{aligned}
$$

De fato, aplicando $T$ em ambos lados da equação (1) e multiplicando a equação (1) por $\lambda_2$ segue-se que

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= T(0) = 0 && (5)\\ \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) &= 0 && (6)\\ \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 &= 0 && (7) \end{aligned}$$

Fazendo (7)-(3) temos que

$$\alpha\lambda_1 v_1 - \alpha\lambda_2 v_1 = 0,$$

$$\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 = 0$$

Portanto $\alpha = 0$ pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

De fato, aplicando $T$ em ambos lados da equação (1) e multiplicando a equação (1) por $\lambda_2$ segue-se que

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= T(0) = 0 \quad (5) \\ \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) &= 0 \quad (6) \\ \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 &= 0 \quad (7) \end{aligned}$$

Fazendo (7)-(3) temos que

$$\alpha\lambda_1 v_1 - \alpha\lambda_2 v_1 = 0,$$

$$\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0$$

Portanto $\alpha = 0$ pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Por outro lado, fazendo (7)-(4) temos que

$$\beta\lambda_2 v_2 - \beta\lambda_1 v_2 = 0$$

$$\beta(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Portanto $\beta = 0$ pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Por outro lado, fazendo (7)-(4) temos que

$$\beta\lambda_2 v_2 - \beta\lambda_1 v_2 = 0$$

$$\beta(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Portanto $\beta = 0$ pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

## Proposição

*Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em $V$. Se $T$ tem $n$ autovalores distintos então $V$ tem uma base formada por autovetores de $T$.*

Demonstração: Sejam $\lambda_1, ...\lambda_n$ autovalores distintos de $T$ e $v_1, ..., v_n$ autovetores tais que $v_i$ é associado a $\lambda_i,\ i = 1, ..., n$. Vamos mostrar que $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Suponhamos que que $\{v_1, ..., v_n\}$ é LD. Então existem $a_1, ...a_n$ não todos nulos tal que

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + ... + a_n v_n &= 0 && (8) \\ T(a_1 v_1 + ... + a_n v_n) &= 0 && (9) \\ a_1 T(v_1) + ... + a_n T(v_n) &= 0 && (10) \\ a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_n \lambda_n v_n &= 0 && (11) \end{aligned}$$

Como $v_1, ..., v_n$ são autovetores então nenhum deles é nulo. Portanto pelo menos 2 $a_i's$ devem ser não nulos. Logo $a_1, ...a_{n-1}$ não são todos nulos.

Por outro lado $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0$,
multiplicando por $\lambda_n$ implica

$$a_1\lambda_n v_1 + ... + a_n\lambda_n v_n = 0 \tag{12}$$

Fazendo 11-12
$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$
Segue que $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD.
Repetindo o mesmo reciocínio um número finito de vezes chegamos que $\{v_1\}$ é LD com $v_1 \neq 0$ pois $v_1$ é autovetor. ABSURDO
Portanto, $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Por outro lado $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0$,
multiplicando por $\lambda_n$ implica

$$a_1 \lambda_n v_1 + ... + a_n \lambda_n v_n = 0 \tag{12}$$

Fazendo 11-12
$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$
Segue que $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD.
Repetindo o mesmo reciocínio um número finito de vezes chegamos que $\{v_1\}$ é LD com $v_1 \neq 0$ pois $v_1$ é autovetor. ABSURDO
Portanto, $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Por outro lado $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0$,
multiplicando por $\lambda_n$ implica

$$a_1 \lambda_n v_1 + ... + a_n \lambda_n v_n = 0 \tag{12}$$

Fazendo 11-12
$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$
Segue que $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD.
Repetindo o mesmo reciocínio um número finito de vezes chegamos que $\{v_1\}$ é LD com $v_1 \neq 0$ pois $v_1$ é autovetor. ABSURDO
Portanto, $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Por outro lado $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$,
multiplicando por $\lambda_n$ implica

$$a_1\lambda_n v_1 + ... + a_n\lambda_n v_n = 0 \tag{12}$$

Fazendo 11-12
$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$
Segue que $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD.
Repetindo o mesmo reciocínio um número finito de vezes chegamos que $\{v_1\}$ é LD com $v_1 \neq 0$ pois $v_1$ é autovetor. ABSURDO
Portanto, $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Por outro lado $a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0$,
multiplicando por $\lambda_n$ implica

$$a_1 \lambda_n v_1 + ... + a_n \lambda_n v_n = 0 \tag{12}$$

Fazendo 11-12
$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$
Segue que $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD.
Repetindo o mesmo reciocínio um número finito de vezes chegamos que $\{v_1\}$ é LD com $v_1 \neq 0$ pois $v_1$ é autovetor. ABSURDO
Portanto, $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

Por outro lado $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$,
multiplicando por $\lambda_n$ implica

$$a_1\lambda_nv_1 + ... + a_n\lambda_nv_n = 0 \tag{12}$$

Fazendo 11-12
$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + ... + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$
Segue que $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ é LD.
Repetindo o mesmo reciocínio um número finito de vezes chegamos que $\{v_1\}$ é LD com $v_1 \neq 0$ pois $v_1$ é autovetor. ABSURDO
Portanto, $\{v_1, ..., v_n\}$ é LI.

## Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovetores:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = 3$$

Portanto $T$ é diagonalizável!!

## Exemplo

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovetores:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = 3$$

Portanto $T$ é diagonalizável!!

## Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovetores:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = 3$$

Portanto $T$ é diagonalizável!!

## Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores de $T$ (raízes de $P_T(\lambda)$)

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

$\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

## Exemplo

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores de $T$ (raízes de $P_T(\lambda)$)

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

$\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

## Exemplo

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

Polinômio caracteristico

$$P_T(\lambda) = det([T]_{B,B} - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

Autovalores de $T$ (raízes de $P_T(\lambda)$)

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

$\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

$\lambda = 0$ $ma(0) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 0$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque

$([T] - 0I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0$ e $z = -y$

$[v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}, \ y \neq 0$

$$v = 0(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + (-y)(1, 1, 1)$$

$$v = (0, 0, -y), \ y \neq 0$$

$\lambda = 0$ $ma(0) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 0$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque

$([T] - 0I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0$ e $z = -y$

$[v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}, \; y \neq 0$

$$v = 0(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + (-y)(1, 1, 1)$$

$$v = (0, 0, -y), \; y \neq 0$$

$\lambda = 0$ $ma(0) = 1$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 0$: $v = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ talque

$([T] - 0I)[v] = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0$ e $z = -y$

$[v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}, \ y \neq 0$

$$v = 0(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + (-y)(1, 1, 1)$$

$$v = (0, 0, -y), \ y \neq 0$$

Autovetores $\{(0,0,-y), y \neq 0\}$

$$V_0 = \{(0,0,-y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(0,0,-1)]$$

$$mg(0) = 1$$

$$\lambda = 1 \quad ma(1) = 2$$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 1$: $v = (x,y,z) \neq (0,0,0)$ talque $([T] - 1I)[v]_B = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z = 0$

Autovetores $\{(0,0,-y), y \neq 0\}$

$$V_0 = \{(0,0,-y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(0,0,-1)]$$

$$mg(0) = 1$$

$$\lambda = 1 \quad ma(1) = 2$$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 1$: $v = (x,y,z) \neq (0,0,0)$ talque $([T] - 1I)[v]_B = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z = 0$

Autovetores $\{(0,0,-y), y \neq 0\}$

$$V_0 = \{(0,0,-y),\ y \in \mathbb{R}\} = [(0,0,-1)]$$

$$mg(0) = 1$$

$$\lambda = 1 \quad ma(1) = 2$$

Autovetores asssociados a $\lambda_1 = 1$: $v = (x,y,z) \neq (0,0,0)$ talque $([T] - 1I)[v]_B = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z = 0$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},\ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$

$$v = x(1,0,0) + y(1,1,0) + 0(1,1,1)$$

$$v = (x+y, y, 0),\ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$

Autovetores associados a $\lambda_2 = 1$

$$\{(x+y, y, 0),\ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\}$$

$$V_1 = \{(x+y, y, 0), , y \in \mathbb{R}\}$$

$$V_1 = \{(x,0,0) + (y,y,0), , y \in \mathbb{R}\}$$

$$V_1 = [(1,0,0), (1,1,0)]$$

$mg(1) = 2$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$

$$v = x(1,0,0) + y(1,1,0) + 0(1,1,1)$$

$$v = (x+y, y, 0), \ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$

Autovetores associados a $\lambda_2 = 1$

$$\{(x+y, y, 0), \ x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0\}$$

$$V_1 = \{(x+y, y, 0), , y \in \mathbb{R}\}$$

$$V_1 = \{(x,0,0) + (y,y,0), , y \in \mathbb{R}\}$$

$$V_1 = [(1,0,0),(1,1,0)]$$

$mg(1) = 2$

- $v_1 = (0, 0, -1)$ é autovetor associado a $\lambda = 0$
- $v_2 = (1, 0, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$
- $v_3 = (1, 1, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$

$\tilde{B} = \{(0, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $T$

Portanto $T$ é diagonalizável

$$[T]_{\tilde{B},\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $T$ aparecem na diagonal.

- $v_1 = (0, 0, -1)$ é autovetor associado a $\lambda = 0$
- $v_2 = (1, 0, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$
- $v_3 = (1, 1, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$

$\tilde{B} = \{(0, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $T$

Portanto $T$ é diagonalizável

$$[T]_{\tilde{B},\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $T$ aparecem na diagonal.

- $v_1 = (0, 0, -1)$ é autovetor associado a $\lambda = 0$
- $v_2 = (1, 0, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$
- $v_3 = (1, 1, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$

$\tilde{B} = \{(0, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $T$

Portanto $T$ é diagonalizável

$$[T]_{\tilde{B},\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $T$ aparecem na diagonal.

- $v_1 = (0, 0, -1)$ é autovetor associado a $\lambda = 0$
- $v_2 = (1, 0, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$
- $v_3 = (1, 1, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$

$\tilde{B} = \{(0, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $T$

Portanto $T$ é diagonalizável

$$[T]_{\tilde{B},\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $T$ aparecem na diagonal.

- $v_1 = (0, 0, -1)$ é autovetor associado a $\lambda = 0$
- $v_2 = (1, 0, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$
- $v_3 = (1, 1, 0)$ é autovetor associado a $\lambda = 1$

$\tilde{B} = \{(0, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $T$

Portanto $T$ é diagonalizável

$$[T]_{\tilde{B},\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de $T$ aparecem na diagonal.

## Teorema

*Sejam $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear em $V$. Assuma que $P_T(\lambda)$ tem todas as raízes em $\mathbb{R}$. Então, $T$ é diagonalizável se, e só se:*

1) *Para cada autovalor $\lambda$, $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.*
2) *A soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de $T$ coincide com a dimensão de $V$.*

## Voltando ao Exemplo anterior

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

$\lambda = 0 \quad ma(0) = mg(0) = 1$

$$V_0 = [(0,0,-1)]$$

$$\lambda = 1 \quad ma(1) = mg(1) = 2$$

$$V_1 = [(1,0,0),(1,1,0)]$$

Portanto $T$ é diagonalizável.

## Voltando ao Exemplo anterior

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

$\lambda = 0 \quad ma(0) = mg(0) = 1$

$$V_0 = [(0,0,-1)]$$

$$\lambda = 1 \quad ma(1) = mg(1) = 2$$

$$V_1 = [(1,0,0),(1,1,0)]$$

Portanto $T$ é diagonalizável.

## Voltando ao Exemplo anterior

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(-\lambda)$$

$\lambda = 0 \;\; ma(0) = mg(0) = 1$

$$V_0 = [(0, 0, -1)]$$

$$\lambda = 1 \quad ma(1) = mg(1) = 2$$

$$V_1 = [(1, 0, 0), (1, 1, 0)]$$

Portanto $T$ é diagonalizável.

## Exemplo (Voltando ao exemplo da aula passada)

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(-\lambda)$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$

Como $V_0 = [(0,0,1)]$ e $V_1 = [(1,0,0)]$

e não temos 3 autovetores LI.

Note que este foi justamente o exemplo em que $ma(0) = mg(0) = 1$

$ma(1) \neq mg(1)$ pois $ma(1) = 2$ e $mg(1) = 1$

então $T$ não é diagonalizável.

## Exemplo (Voltando ao exemplo da aula passada)

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(-\lambda)$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$

Como $V_0 = [(0,0,1)]$ e $V_1 = [(1,0,0)]$

e não temos 3 autovetores LI.

Note que este foi justamente o exemplo em que $ma(0) = mg(0) = 1$

$ma(1) \neq mg(1)$ pois $ma(1) = 2$ e $mg(1) = 1$

então $T$ não é diagonalizável.

## Exemplo (Voltando ao exemplo da aula passada)

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(-\lambda)$$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$

Como $V_0 = [(0,0,1)]$ e $V_1 = [(1,0,0)]$

e não temos 3 autovetores LI.

Note que este foi justamente o exemplo em que $ma(0) = mg(0) = 1$

$ma(1) \neq mg(1)$ pois $ma(1) = 2$ e $mg(1) = 1$

então $T$ não é diagonalizável.