Diagonalização de Matrizes

Definição e exemplos

Álgebra Linear

Mariana Silveira - Cristian Coletti

Universidade Federal do ABC

Autovalores e Autovetores de matrizes

Seja A uma matriz $n \times n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um autovetor de A é uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$ com λ autovalor.

Temos então

$$\begin{aligned} \lambda \text{ autovalor} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists X \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists X \neq 0 \text{ tal que } (A - \lambda)X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad det(A - \lambda I) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ é raíz do polinômio caracteristico } P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Autovalores e Autovetores de matrizes

Seja A uma matriz $n \times n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um autovetor de A é uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$ com λ autovalor.

Temos então

$$\begin{aligned} \lambda \text{ autovalor} &\iff \exists X \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \neq 0 \text{ tal que } (A - \lambda)X = 0 \\ &\iff det(A - \lambda I) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ é raíz do polinômio caracteristico } P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Autovalores e Autovetores de matrizes

Seja A uma matriz $n \times n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um autovetor de A é uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$ com λ autovalor.

Temos então

$$\begin{aligned} \lambda \text{ autovalor} &\iff \exists X \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \neq 0 \text{ tal que } (A - \lambda)X = 0 \\ &\iff det(A - \lambda I) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ é raíz do polinômio caracteristico } P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Autovalores e Autovetores de matrizes

Seja A uma matriz $n \times n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um autovetor de A é uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$ com λ autovalor.

Temos então

$$\begin{aligned} \lambda \text{ autovalor} \quad & \iff \quad \exists X \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X \\ & \iff \quad \exists X \neq 0 \text{ tal que } (A - \lambda)X = 0 \\ & \iff \quad det(A - \lambda I) = 0 \\ & \iff \quad \lambda \ \text{ é raíz do polinômio caracteristico } P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Autovalores e Autovetores de matrizes

Seja A uma matriz $n \times n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Um autovetor de A é uma matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $AX = \lambda X$ com λ autovalor.

Temos então

$$\begin{aligned} \lambda \text{ autovalor} &\iff \exists X \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \neq 0 \text{ tal que } (A - \lambda)X = 0 \\ &\iff det(A - \lambda I) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ é raíz do polinômio caracteristico } P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Dado λ autovalor de A, os autovetores associados a λ são: $X \neq 0$, tal que $(A - \lambda)X = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado λ autovalor de A, os autovetores associados a λ são: $X \neq 0$, tal que $(A - \lambda)X = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relembrando:

- A é diagonalizável se A é semelhante a uma matriz diagonal D, ou seja, se existe uma matriz invertível $M_{n\times n}$ tal que $D = M^{-1}AM$.

Observação:

- Seja A uma matriz $M_{n\times n}$. Então existe uma transformação linear (única) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$tal que $[T]=A$. Temos que A é diagonalizável $\iff$ T é diagonalizável. De fato,
-

$$\begin{aligned} T \text{ é diagonalizável} &\iff \exists \text{ base } B \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ tal que } [T]_{BB} \text{ é diagonal} \\ &\iff [T]_{BB}=[M]_{BC}^{-1}\,[T]\,[M]_{BC} \\ &\iff D=M^{-1}\,A\,M \\ &\iff A \text{ é diagonalizável} \end{aligned}$$

Observação:

- Seja A uma matriz $M_{n\times n}$. Então existe uma transformação linear (única) $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$tal que $[T] = A$. Temos que A é diagonalizável $\iff$ T é diagonalizável. De fato,
-

$$\begin{aligned} T \text{ é diagonalizável} &\iff \exists \text{ base } B \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ tal que } [T]_{BB} \text{ é diagonal} \\ &\iff [T]_{BB} = [M]_{BC}^{-1}\,[T]\,[M]_{BC} \\ &\iff D = M^{-1}\,A\,M \\ &\iff A \text{ é diagonalizável} \end{aligned}$$

Observação:

- Seja A uma matriz $M_{n\times n}$. Então existe uma transformação linear (única) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$tal que $[T] = A$. Temos que A é diagonalizável $\iff$ T é diagonalizável. De fato,
-

$$
\begin{aligned}
T \text{ é diagonalizável} &\iff \exists \text{ base } B \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ tal que } [T]_{BB} \text{ é diagonal} \\
&\iff [T]_{BB} = [M]_{BC}^{-1}\,[T]\,[M]_{BC} \\
&\iff D = M^{-1}\,A\,M \\
&\iff A \text{ é diagonalizável}
\end{aligned}
$$

Observação:

- Seja A uma matriz $M_{n\times n}$. Então existe uma transformação linear (única) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$tal que $[T] = A$. Temos que A é diagonalizável $\iff$ T é diagonalizável. De fato,
-

$$\begin{aligned} T \text{ é diagonalizável} \quad &\iff \quad \exists \text{ base } B \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ tal que } [T]_{BB} \text{ é diagonal} \\ &\iff \quad [T]_{BB} = [M]_{BC}^{-1}\,[T]\,[M]_{BC} \\ &\iff \quad D = M^{-1}\,A\,M \\ &\iff \quad A \text{ é diagonalizável} \end{aligned}$$

Note que $[M]_{BC}$ com $B = \{u_1, ..., u_n\}$ base de autovetores e $C = \{e_1, ..., e_n\}$ base canônica

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11} e_1 + ... + \alpha_{n1} e_n \\ u_2 &= \alpha_{12} e_1 + ... + \alpha_{n2} e_n \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha_{1n} e_1 + ... + \alpha_{nn} e_n \end{aligned}$$

é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos autovetores na base canônica.

Se A é diagonalizável, a matriz invertível M tal que $D = M^{-1}\ A\ M$ é

$$M = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \end{bmatrix}$$

Matriz cujas colunas são os autovetores de A e D é a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

u_1 autovetor associado a λ_1

u_2 autovetor associado a λ_2

$\vdots$

u_n autovetor associado a λ_n

Se A é diagonalizável, a matriz invertível M tal que $D = M^{-1}\ A\ M$ é

$$M = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \end{bmatrix}$$

Matriz cujas colunas são os autovetores de A e D é a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

u_1 autovetor associado a λ_1

u_2 autovetor associado a λ_2

$\vdots$

u_n autovetor associado a λ_n

Se A é diagonalizável, a matriz invertível M tal que $D = M^{-1}\ A\ M$ é

$$M = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \end{bmatrix}$$

Matriz cujas colunas são os autovetores de A e D é a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

u_1 autovetor associado a λ_1

u_2 autovetor associado a λ_2

$\vdots$

u_n autovetor associado a λ_n

Teorema

$A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e somente se,

a) *$P_A(\lambda)$ tem todas as raízes em $\mathbb{R}$*

b) *Para cada autovalor λ de A*

$$ma(\lambda) = mg(\lambda)$$

Teorema

$A \in M_n(\mathbb{R})$ possui n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Teorema

$A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e somente se,

a) *$P_A(\lambda)$ tem todas as raízes em $\mathbb{R}$*

b) *Para cada autovalor λ de A*

$$ma(\lambda) = mg(\lambda)$$

Teorema

$A \in M_n(\mathbb{R})$ possui n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Teorema

$A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e somente se,

a) *$P_A(\lambda)$ tem todas as raízes em $\mathbb{R}$*

b) *Para cada autovalor λ de A*

$$ma(\lambda) = mg(\lambda)$$

Teorema

$A \in M_n(\mathbb{R})$ possui n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Exemplo

Encontre os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifique se A é diagonalizável.

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Exemplo

Encontre os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifique se A é diagonalizável.

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Exemplo

Encontre os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifique se A é diagonalizável.

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Exemplo

Encontre os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifique se A é diagonalizável.

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \text{ det } \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Autovalores (raízes de $P_A(\lambda)$

$$(3-\lambda)^2(-1-\lambda)=0$$

$\lambda=-1$ ou $\lambda=3$

Se $\lambda=-1$ $ma(-1)=1$

Autovetores

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A-(-1)I)X=0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores (raízes de $P_A(\lambda)$

$$(3-\lambda)^2(-1-\lambda)=0$$

$\lambda=-1$ ou $\lambda=3$

Se $\lambda=-1$ $ma(-1)=1$

Autovetores

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A-(-1)I)X=0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores (raízes de $P_A(\lambda)$

$$(3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

$\lambda = -1$ ou $\lambda = 3$

Se $\lambda = -1$ $ma(-1) = 1$

Autovetores

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - (-1)I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = z$

$4y + 5z = 0$

$y = \frac{-5}{4} z$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} z \\ \frac{-5}{4} z \\ z \end{bmatrix}, z \neq 0 \right\}$$

$$V_{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad mg(-1) = 1$$

$x = z$

$4y + 5z = 0$

$y = \frac{-5}{4}z$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} z \\ \frac{-5}{4}z \\ z \end{bmatrix}, z \neq 0 \right\}$$

$$V_{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad mg(-1) = 1$$

Se $\lambda = 3$ $ma(3) = 2$

Autovetores

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - (3)I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo $z = 0$

Se $\lambda = 3$ $ma(3) = 2$

Autovetores

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - (3)I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo $z = 0$

$z = 0$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad mg(3) = 2$$

Portanto A é diagonalizável.

$z = 0$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad mg(3) = 2$$

Portanto A é diagonalizável.

$z = 0$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\ \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad mg(3) = 2$$

Portanto A é diagonalizável.

Existem matrizes M invertível e D diagonal tais que $D = M^{-1}\ A\ M$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$$

com x_1 autovetor associado a -1 e $x_2,\ x_3$ autovetores associados a 3 e

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Potência de uma matriz

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. As potências de A são

$$A^2,\ A^3, ..., A^p, ...$$

Para valores de p grandes, este cálculo em geral é penoso. No entanto, quando A é diagonalizável, existe uma forma de simplificar o problema.

Se A é diagonalizável, existem M invertível e D diagonal tais que

$$D = M^{-1}\, A\, M$$

Ou seja,

$$A = M\, D\, M^{-1}$$

Logo

$$A^2 = M\, D\, M^{-1}\, M\, D\, M^{-1} = M\, D^2\, M^{-1}$$

Se A é diagonalizável, existem M invertível e D diagonal tais que

$$D = M^{-1} A M$$

Ou seja,

$$A = M D M^{-1}$$

Logo

$$A^2 = M D M^{-1} M D M^{-1} = M D^2 M^{-1}$$

Se A é diagonalizável, existem M invertível e D diagonal tais que

$$D = M^{-1}\ A\ M$$

Ou seja,

$$A = M\ D\ M^{-1}$$

Logo

$$A^2 = M\ D\ M^{-1}\ M\ D\ M^{-1} = M\ D^2\ M^{-1}$$

Se A é diagonalizável, existem M invertível e D diagonal tais que

$$D = M^{-1}\,A\,M$$

Ou seja,

$$A = M\,D\,M^{-1}$$

Logo

$$A^2 = M\,D\,M^{-1}\,M\,D\,M^{-1} = M\,D^2\,M^{-1}$$

Por indução

$$A^k = M\, D^k\, M^{-1}$$

como

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

então

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Por indução

$$A^k = M\, D^k\, M^{-1}$$

como

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

então

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Por indução

$$A^k = M\ D^k\ M^{-1}$$

como

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

então

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Por indução

$$A^k = M\,D^k\,M^{-1}$$

como

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

então

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Exemplo

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule A^4

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3$$

Autovalores de A (raízes de $P_A(\lambda)$)

$$P_A(\lambda) = (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Autovalores todos distintos. Portanto A é diaginalizável.

Exemplo

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule A^4

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$$

Autovalores de A (raízes de $P_A(\lambda)$)

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Autovalores todos distintos. Portanto A é diaginalizável.

Exemplo

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule A^4

Polinômio caracteristico

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3$$

Autovalores de A (raízes de $P_A(\lambda)$)

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$ então $\lambda = 6$ ou $\lambda = 2$

Autovalores todos distintos. Portanto A é diaginalizável.

$\lambda = 2$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - 2I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$, logo $x = -3y$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix}, y \neq 0 \right\}$$

$\lambda = 2$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - 2I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x + 3y = 0$, logo $x = -3y$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix}, y \neq 0 \right\}$$

$\lambda = 6$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - 6I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo $x = y$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \neq 0 \right\}$$

$\lambda = 6$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tal que $(A - 6I)X = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo $x = y$

Autovetores

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \neq 0 \right\}$$

$V_2 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda = 2$ $V_6 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda = 6$

$$M = \begin{bmatrix} v_1 \downarrow & v_2 \downarrow \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz cujas colunas são os autovetores de A e D é a matriz diagonal

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ Com $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$

$V_2 = (-3, 1)$ autovetor associado a $\lambda = 2$ $V_6 = (1, 1)$ autovetor associado a $\lambda = 6$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 \downarrow & v_2 \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz cujas colunas são os autovetores de A e D é a matriz diagonal

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ Com $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$

$$A^4 = M\ D^4\ M^{-1}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 6^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48.3 & 1296 \\ 48 & 1296 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 360 & 936 \\ 312 & 336 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = M\ D^4\ M^{-1}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 6^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48.3 & 1296 \\ 48 & 1296 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 360 & 936 \\ 312 & 336 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = M\ D^4\ M^{-1}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 6^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48.3 & 1296 \\ 48 & 1296 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 360 & 936 \\ 312 & 336 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = M\ D^4\ M^{-1}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 6^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48.3 & 1296 \\ 48 & 1296 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 360 & 936 \\ 312 & 336 \end{bmatrix}$$