Soma de subespaços

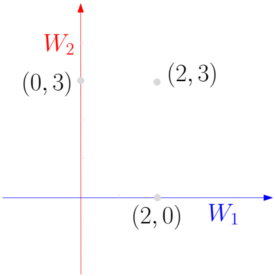
Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V.

- $W_1 \cup W_2$ em geral não é um subespaço de V.

  Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$,

  $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e

  $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.



A soma de W_1 com W_2, que denotamos por $W_1 + W_2$ é o subconjunto de V

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

No Exemplo, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, y)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$

Portanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

Soma de subespaços

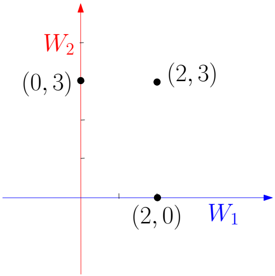
Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V.

- $W_1 \cup W_2$ em geral não é um subespaço de V.

  Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$,

  $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e

  $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.



A soma de W_1 com W_2, que denotamos por $W_1 + W_2$ é o subconjunto de V

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

No Exemplo, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, y)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$

Portanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

Soma de subespaços

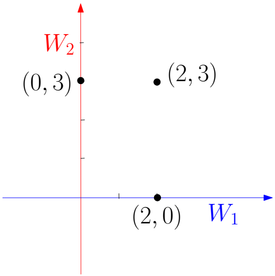
Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V.

- $W_1 \cup W_2$ em geral não é um subespaço de V.

  Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$,

  $W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e

  $W_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.



A soma de W_1 com W_2, que denotamos por $W_1 + W_2$ é o subconjunto de V

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

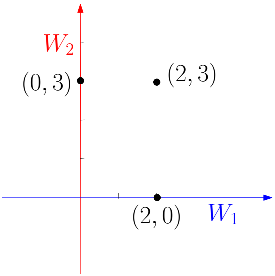
No Exemplo, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$

Portanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

Soma de subespaços

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V.

- $W_1 \cup W_2$ em geral não é um subespaço de V.
  Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$,
  $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e
  $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.



A soma de W_1 com W_2, que denotamos por $W_1 + W_2$ é o subconjunto de V

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

No Exemplo, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, y)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$

Portanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

Soma de subespaços

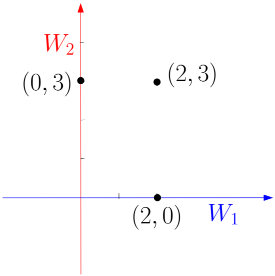
Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V.

- $W_1 \cup W_2$ em geral não é um subespaço de V.

  Exemplo: Considere $V = \mathbb{R}^2$,

  $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e

  $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.



A soma de W_1 com W_2, que denotamos por $W_1 + W_2$ é o subconjunto de V

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

No Exemplo, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, y)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$

Portanto $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

Exemplo

Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \ c, d \in \mathbb{R} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}, \ e \in \mathbb{R} \right\}$$

- $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. De fato, para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ temos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- $W_1 + W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ e & 0 \end{bmatrix}, \ a, b, e \in \mathbb{R} \right\}.$

Obs: Note que $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2$, pois $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$.

Exemplo

Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}, e \in \mathbb{R} \right\}$$

- $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. De fato, para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ temos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- $W_1 + W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ e & 0 \end{bmatrix}, a, b, e \in \mathbb{R} \right\}$.

Obs: Note que $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2$, pois $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$.

Exemplo

Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}, e \in \mathbb{R} \right\}$$

- $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. De fato, para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ temos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- $W_1 + W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ e & 0 \end{bmatrix}, a, b, e \in \mathbb{R} \right\}$.

Obs: Note que $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2$, pois $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$.

Exemplo

Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \ c, d \in \mathbb{R} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}, \ e \in \mathbb{R} \right\}$$

- $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. De fato, para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ temos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- $W_1 + W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ e & 0 \end{bmatrix}, \ a, b, e \in \mathbb{R} \right\}.$

Obs: Note que $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2$, pois $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$.

Exemplo

Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}, e \in \mathbb{R} \right\}$$

- $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$. De fato, para toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ temos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- $W_1 + W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ e & 0 \end{bmatrix}, a, b, e \in \mathbb{R} \right\}$.

Obs: Note que $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2$, pois $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que

$u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que

$u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que $u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que

$u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que

$u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que

$u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Proposição: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

(c) $W_1 + \{0\} = W_1$.

Prova:

(a) Segue da comutatividade da operação $+$ de V. $\leftarrow A_2$

(b) Dado $u_1 \in W_1$, temos $u_1 = \underbrace{u_1}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + W_2$.

Analogamente, $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

(c) $W_1 + \{0\} \supseteq W_1$ por (b). Dado $\underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in \{0\}} \in W_1 + \{0\}$ temos que

$u + 0 = u \in W_1$. Logo $W_1 \subseteq W_1 + \{0\}$. $\square$

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{A1,A2}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{A1,A2}{\overset{\downarrow}{=}} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \stackrel{\stackrel{A1,A2}{\downarrow}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{\substack{A1,A2 \\ \downarrow}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \stackrel{A1,A2}{\downarrow\atop =} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{\overset{A1,A2}{\downarrow}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{\overset{A1,A2}{\downarrow}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{\overset{\text{A1,A2}}{\downarrow}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{\text{A1,A2}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $W_1 + W_2$ também é um subespaço de V.

Prova:

sv_1. $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. De fato, como $0 \in W_1$ e $0 \in W_2$, então $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$.

sv_2. $W_1 + W_2$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Como $v \in W_1 + W_2$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$.

Logo $u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \overset{\overset{A1,A2}{\downarrow}}{=} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$.

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, $u_1 + v_1 \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, $u_2 + v_2 \in W_2$.

Portanto $u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv_3. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\substack{M3 \\ \downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. □

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv$_3$. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{M3}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv_3. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv_3. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv_3. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv_3. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv_3. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma de subespaços: Propriedades

sv$_3$. $W_1 + W_2$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 + W_2$.

Como $u \in W_1 + W_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$.

Logo $\alpha.u = \alpha.(u_1 + u_2) \overset{\overset{M3}{\downarrow}}{=} \alpha.u_1 + \alpha.u_2$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_1 \in W_1$.

Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $\alpha.u_2 \in W_2$.

Portanto $\alpha.u = \alpha.u_1 + \alpha.u_2 \in W_1 + W_2$. $\square$

Obs: A soma dos subespaços $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.
   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.
2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.
   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.

   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.

2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.

   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.
   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.
2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.
   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.
   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.
2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.
   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.

   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.

2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.
   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.
   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.
2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.
   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Soma direta de subespaços.

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que a soma de W_1 com W_2 é **soma direta** e denotamos a soma dos subespaços por $W_1 \oplus W_2$.

Exemplos

1. $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y.

   A soma $W_1 + W_2$ é soma direta. Escrevemos $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$.

2. $V = M_2(\mathbb{R})$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores, W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferiores.

   - $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$,
   - $W_1 \cup W_2 \subsetneq W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$
   - $W_1 \cap W_2$ é o conjunto das matrizes diagonais.

   A soma $W_1 + W_2$ NÃO é soma direta.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$.
  $a_1x + a_0 = a_2x^2 \ \forall x \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.

  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$.
  $a_1x + a_0 = a_2x^2 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$. $a_1x + a_0 = a_2x^2 \ \forall x \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0$

- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.

  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$.
  $a_1x + a_0 = a_2x^2\ \forall x \ \Leftrightarrow\ a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.

  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1 x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2 x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1 x + a_0 = a_2 x^2$.
  $a_1 x + a_0 = a_2 x^2 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2 x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1 x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$.
  $a_1x + a_0 = a_2x^2 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1 x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2 x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1 x + a_0 = a_2 x^2$.
  $a_1 x + a_0 = a_2 x^2 \; \forall x \; \Leftrightarrow \; a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2 x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1 x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$.
  $a_1x + a_0 = a_2x^2 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1x + a_0 = a_2x^2$.
  $a_1x + a_0 = a_2x^2 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Subespaços Suplementares

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Se a soma de W_1 com W_2 é direta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) e é igual ao espaço V, ou seja, $V = W_1 \oplus W_2$, dizemos que W_1 e W_2 são **suplementares**.

- Os subespaços do Exemplo 1 são suplementares. Os subespaços do Exemplo 2 não são suplementares, pois a soma não é direta.

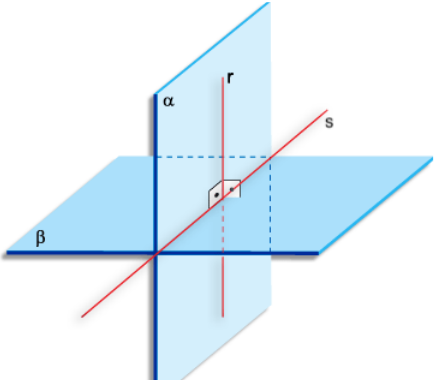
3. $V = P_2(\mathbb{R})$, $W_1 = \{a_1 x + a_0, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{a_2 x^2, a_2 \in \mathbb{R}\}$

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. De fato, se $p \in W_1 \cap W_2$, $p(x) = a_1 x + a_0 = a_2 x^2$.
  $a_1 x + a_0 = a_2 x^2 \; \forall x \;\Leftrightarrow\; a_0 = a_1 = a_2 = 0$
- $W_1 \oplus W_2 = P_2(\mathbb{R})$. De fato, se $p \in P_2(\mathbb{R})$, $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
  $p(x) = \underbrace{a_2 x^2}_{\in W_2} + \underbrace{a_1 x + a_0}_{\in W_1} \in W_2 \oplus W_1 = W_1 \oplus W_2$.
  Portanto os subespaços do W_1 e W_2 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

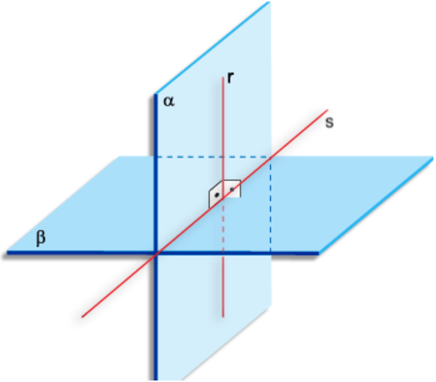


- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.



- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

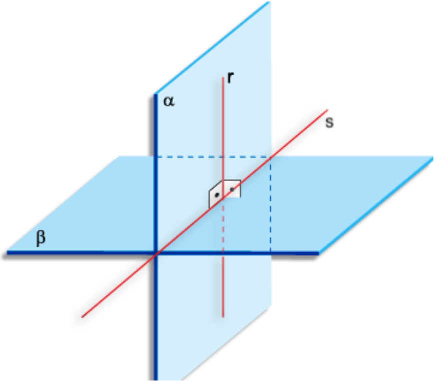
Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.

- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.

- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

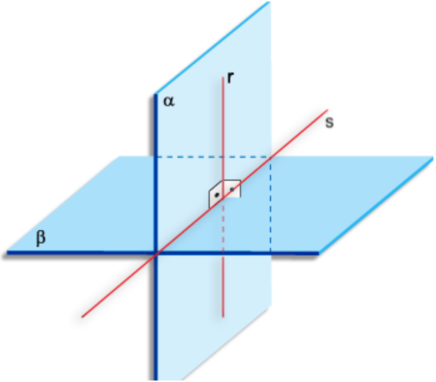


- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.



- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.

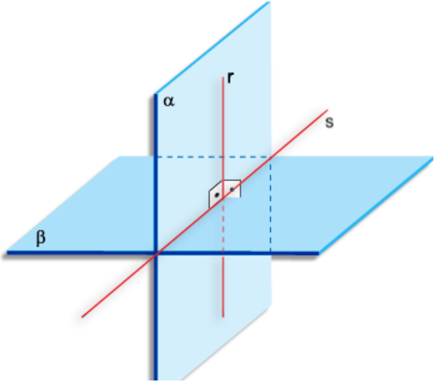
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

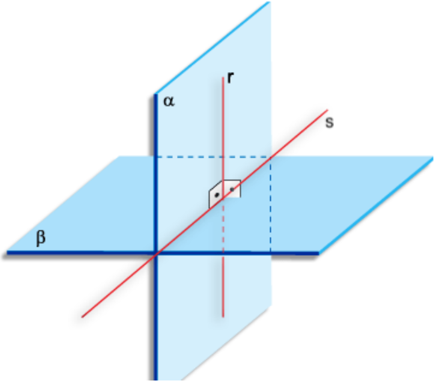
- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.
- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.



Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

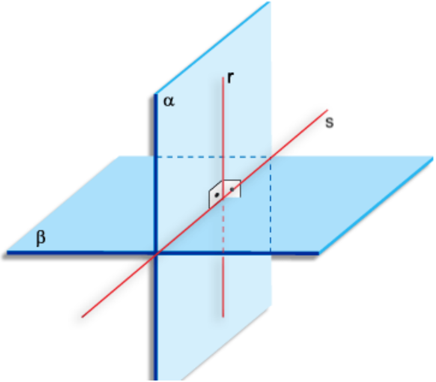
- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.
- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.



Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

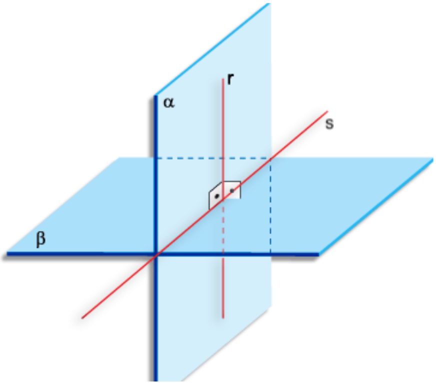
- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.
- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.



Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

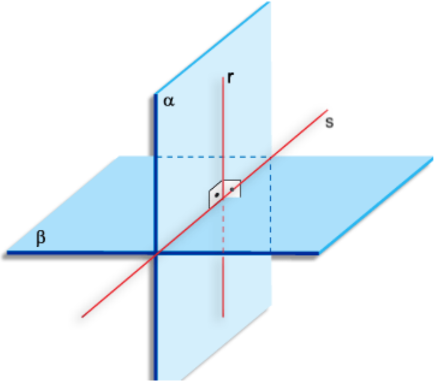
- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.
- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.



Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

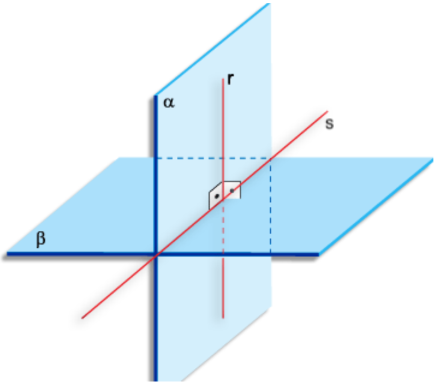


- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

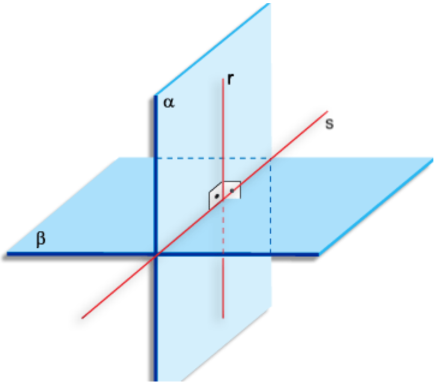


- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

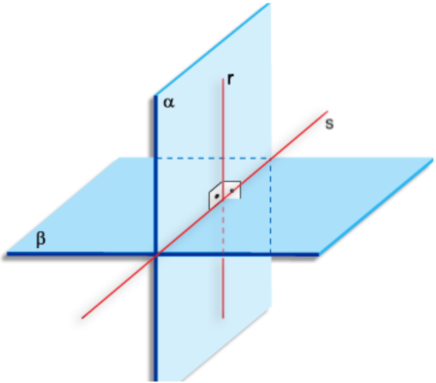


- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.

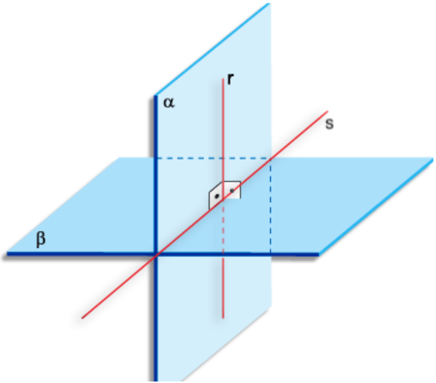


- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Exemplos

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, W_1 o plano α, W_2 o plano β, W_3 a reta r e W_4 a reta s.

- $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$, $W_1 \cap W_2 = s$. Portanto W_1 e W_2 não são suplementares.
- $W_3 + W_4 = \alpha$, $W_3 \cap W_4 = \{0\}$. Portanto a soma de W_3 e W_4 é soma direta, com W_3 e W_4 não são suplementares.
- $W_1 + W_3 = \alpha$, $W_1 \cap W_3 = \{r\}$. Portanto a soma de W_1 e W_3 não é soma direta, e W_1 e W_3 não são suplementares.



- $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$, $W_2 \cap W_3 = \{0\}$. Portanto W_2 e W_3 são suplementares.

Teorema da Decomposição

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada $u \in V$ se escreve de forma única como

$$u = u_1 + u_2, \ u_1 \in W_1, \ u_2 \in W_2.$$

Prova:

($\Rightarrow$)Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$. Então para todo $u \in V$ existe a decomposição

$$u = u_1 + u_2, \ u_1 \in W_1, \ u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que essa decomposição é única. Suponhamos que

$$u = v_1 + v_2, \ v_1 \in W_1, \ v_2 \in W_2.$$

Temos então que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ e portanto

$$u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \leftarrow A4$$

Teorema da Decomposição

Teorema: Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada $u \in V$ se escreve de forma única como

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in W_1,\ u_2 \in W_2.$$

Prova:

$(\Rightarrow)$Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$. Então para todo $u \in V$ existe a decomposição

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in W_1,\ u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que essa decomposição é única. Suponhamos que

$$u = v_1 + v_2,\ v_1 \in W_1,\ v_2 \in W_2.$$

Temos então que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ e portanto

$$u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \leftarrow A4$$

Teorema da Decomposição

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada $u \in V$ se escreve de forma única como

$$u = u_1 + u_2, \ \ u_1 \in W_1, \ \ u_2 \in W_2.$$

Prova:

$(\Rightarrow)$Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$. Então para todo $u \in V$ existe a decomposição

$$u = u_1 + u_2, \ \ u_1 \in W_1, \ \ u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que essa decomposição é única. Suponhamos que

$$u = v_1 + v_2, \ \ v_1 \in W_1, \ \ v_2 \in W_2.$$

Temos então que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ e portanto

$$u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \leftarrow \text{A4}$$

Teorema da Decomposição

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada $u \in V$ se escreve de forma única como

$$u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in W_1, \;\; u_2 \in W_2.$$

Prova:

$(\Rightarrow)$Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$. Então para todo $u \in V$ existe a decomposição

$$u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in W_1, \;\; u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que essa decomposição é única. Suponhamos que

$$u = v_1 + v_2, \;\; v_1 \in W_1, \;\; v_2 \in W_2.$$

Temos então que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ e portanto

$$u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \leftarrow \text{A4}$$

Teorema da Decomposição

Teorema: Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e W_1, W_2 subespaços de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada $u \in V$ se escreve de forma única como

$$u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in W_1, \;\; u_2 \in W_2.$$

Prova:

$(\Rightarrow)$Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$. Então para todo $u \in V$ existe a decomposição

$$u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in W_1, \;\; u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que essa decomposição é única. Suponhamos que

$$u = v_1 + v_2, \;\; v_1 \in W_1, \;\; v_2 \in W_2.$$

Temos então que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ e portanto

$$u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \leftarrow \text{A4}$$

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo

$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e

$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in W_1, \quad u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.
Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo
$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e
$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in W_1, \quad u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.
Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo
$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e
$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.
($\Leftarrow$) Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in W_1, \;\; u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.
Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo
$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e
$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \ u_1 \in W_1, \ u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.

Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo

$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e

$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.

($\Leftarrow$) Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \; u_1 \in W_1, \; u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.
Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo
$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e
$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in W_1, \;\; u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.
Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo
$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e
$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2, \ u_1 \in W_1, \ u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Como $u_1, v_1 \in W_1$ e W_1 é subespaço vetorial, então $u_1 + (-v_1) \in W_1$.
Como $u_2, v_2 \in W_2$ e W_2 é subespaço vetorial, então $v_2 + (-u_2) \in W_2$. Então

$$\underbrace{u_1 + (-v_1)}_{\in W_1} = \underbrace{v_2 + (-u_2)}_{\in W_2}$$

Segue que $u_1 + (-v_1) = v_2 + (-u_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Logo
$u_1 + (-v_1) = 0$, ou seja, $u_1 = v_1$ e
$v_2 + (-u_2) = 0$, ou seja, $u_2 = v_2$. Portanto a decomposição de u é única.
($\Leftarrow$) Suponhamos que todo $u \in V$ tem uma decomposição única da forma

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in W_1,\ u_2 \in W_2.$$

Queremos mostrar que $V = W_1 \oplus W_2$. É claro que $V = W_1 + W_2$, logo basta mostrar que a soma é direta, ou seja, que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Teorema da Decomposição

Seja $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $u \in W_1$, então temos que

$$u = \underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2}$$

é uma decomposição de u. Como $u \in W_2$, então temos uma outra decomposição de u

$$u = \underbrace{0}_{\in W_1} + \underbrace{u}_{\in W_2}$$

Pela unicidade da decomposição temos que $u = 0$. Portanto $V = W_1 \oplus W_2$.

$\square$

Teorema da Decomposição

Seja $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $u \in W_1$, então temos que

$$u = \underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2}$$

é uma decomposição de u. Como $u \in W_2$, então temos uma outra decomposição de u

$$u = \underbrace{0}_{\in W_1} + \underbrace{u}_{\in W_2}$$

Pela unicidade da decomposição temos que $u = 0$. Portanto $V = W_1 \oplus W_2$.

$\square$

Teorema da Decomposição

Seja $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $u \in W_1$, então temos que

$$u = \underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2}$$

é uma decomposição de u. Como $u \in W_2$, então temos uma outra decomposição de u

$$u = \underbrace{0}_{\in W_1} + \underbrace{u}_{\in W_2}$$

Pela unicidade da decomposição temos que $u = 0$. Portanto $V = W_1 \oplus W_2$.

$\square$

Teorema da Decomposição

Seja $u \in W_1 \cap W_2$.

Como $u \in W_1$, então temos que

$$u = \underbrace{u}_{\in W_1} + \underbrace{0}_{\in W_2}$$

é uma decomposição de u. Como $u \in W_2$, então temos uma outra decomposição de u

$$u = \underbrace{0}_{\in W_1} + \underbrace{u}_{\in W_2}$$

Pela unicidade da decomposição temos que $u = 0$. Portanto $V = W_1 \oplus W_2$.

$\square$