Combinação Linear

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Um vetor $v \in V$ é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^3$. O vetor $(2, 3, 5)$ é combinação linear dos vetores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, pois

$$(2, 3, 5) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1)$$

Obs:$(n = 1)$ Se v é combinação linear de um único vetor v_1, então $v = \alpha_1 v_1$, ou seja, v é multiplo escalar de v_1.

Combinação Linear

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Um vetor $v \in V$ é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^3$. O vetor $(2, 3, 5)$ é combinação linear dos vetores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, pois

$$(2, 3, 5) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1)$$

Obs:($n = 1$) Se v é combinação linear de um único vetor v_1, então $v = \alpha_1 v_1$, ou seja, v é multiplo escalar de v_1.

Combinação Linear

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Um vetor $v \in V$ é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 + \cdots + \alpha_n . v_n$$

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^3$. O vetor $(2, 3, 5)$ é combinação linear dos vetores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, pois

$$(2, 3, 5) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1)$$

Obs:($n = 1$) Se v é combinação linear de um único vetor v_1, então $v = \alpha_1 v_1$, ou seja, v é multiplo escalar de v_1.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 &= \alpha + 6\beta \\ 2 &= 2\alpha + 4\beta \\ 7 &= -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 &= \alpha + 6\beta \\ -1 &= 2\alpha + 4\beta \\ 8 &= -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta \\ 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 7 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 = \alpha + 6\beta \\ -1 = 2\alpha + 4\beta \\ 8 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1,2,-1)$, $v = (6,4,2)$, $w = (9,2,7)$ e $w' = (4,-1,8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9,2,7) = \alpha(1,2,-1) + \beta(6,4,2)$

  $$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta \\ 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 7 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4,-1,8) = \alpha(1,2,-1) + \beta(6,4,2)$

  $$\begin{cases} 4 = \alpha + 6\beta \\ -1 = 2\alpha + 4\beta \\ 8 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 & = \alpha + 6\beta \\ 2 & = 2\alpha + 4\beta \\ 7 & = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 & = \alpha + 6\beta \\ -1 & = 2\alpha + 4\beta \\ 8 & = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 &= \alpha + 6\beta \\ 2 &= 2\alpha + 4\beta \\ 7 &= -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$
  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$
  $\alpha = -3$, $\beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 &= \alpha + 6\beta \\ -1 &= 2\alpha + 4\beta \\ 8 &= -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$
  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$
  $\alpha = -5$, $\beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 & = \alpha + 6\beta \\ 2 & = 2\alpha + 4\beta \\ 7 & = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 & = \alpha + 6\beta \\ -1 & = 2\alpha + 4\beta \\ 8 & = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta \\ 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 7 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 = \alpha + 6\beta \\ -1 = 2\alpha + 4\beta \\ 8 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta \\ 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 7 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 = \alpha + 6\beta \\ -1 = 2\alpha + 4\beta \\ 8 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Exemplo

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (6, 4, 2)$, $w = (9, 2, 7)$ e $w' = (4, -1, 8)$. Mostre que w é combinação linear de u e v, mas w' não é combinação linear de u e v.

- w é combinação linear de u e v

  $w = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (9, 2, 7) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 9 = \alpha + 6\beta \\ 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 7 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $16 = 8\beta \Rightarrow \beta = 2$

  Subst. na eq. I: $9 = \alpha + 6.2 \Rightarrow \alpha = -3$

  $\alpha = -3, \beta = 2$ satisfazem as 3 equações.

- w' não é combinação linear de u e v

  $w' = \alpha.u + \beta.v \Leftrightarrow (4, -1, 8) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(6, 4, 2)$

  $$\begin{cases} 4 = \alpha + 6\beta \\ -1 = 2\alpha + 4\beta \\ 8 = -\alpha + 2\beta \end{cases}$$

  Somando as eqs. I e III: $12 = 8\beta \Rightarrow \beta = 3/2$

  Subst. na eq. I: $4 = \alpha + 6.(3/2) \Rightarrow \alpha = -5$

  $\alpha = -5, \beta = 3/2$ não satisfazem a eq II.

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$
  $[S_1] = \{\alpha.(1, 1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$

$$\begin{aligned} [S_1] &= \{\alpha.(1, 1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$

$$\begin{aligned} [S_1] &= \{\alpha.(1, 1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0,\ x = y\} \end{aligned}$$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1,1,0)\}$
$$\begin{aligned} [S_1] &= \{\alpha.(1,1,0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0,\ x = y\} \end{aligned}$$
- $S_2 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

Espaço Gerado

Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S]=\{\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2+\cdots+\alpha_n.v_n,\ \alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,\dots,n\}$$

Exemplo: $V=\mathbb{R}^3$

- $S_1=\{(1,1,0)\}$
  $$\begin{aligned}[S_1] &= \{\alpha.(1,1,0),\alpha\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha,\alpha,0),\alpha\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z=0,\ x=y\}\end{aligned}$$
- $S_2=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$
  $$[S_2] = \{\alpha.(1,0,0)+\beta.(0,1,0),\alpha,\beta\in\mathbb{R},\}$$

Espaço Gerado

Sejam $(V,+,.)$ um espaço vetorial real e $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S]=\{\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2+\cdots+\alpha_n.v_n,\ \ \alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,n\}$$

Exemplo: $V=\mathbb{R}^3$

- $S_1=\{(1,1,0)\}$
$$\begin{aligned}[S_1] &= \{\alpha.(1,1,0),\alpha\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha,\alpha,0),\alpha\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z=0,\ x=y\}\end{aligned}$$
- $S_2=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$
$$\begin{aligned}[S_2] &= \{\alpha.(1,0,0)+\beta.(0,1,0),\alpha,\beta\in\mathbb{R},\}\\ &= \{(\alpha,\beta,0),\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1,1,0)\}$
$$\begin{aligned} [S_1] &= \{\alpha.(1,1,0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0,\ x = y\} \end{aligned}$$
- $S_2 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$
$$\begin{aligned} [S_2] &= \{\alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \} \\ &= \{(\alpha, \beta, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\} \end{aligned}$$

Espaço Gerado

Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Denotemos por $[S]$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$[S] = \{\alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

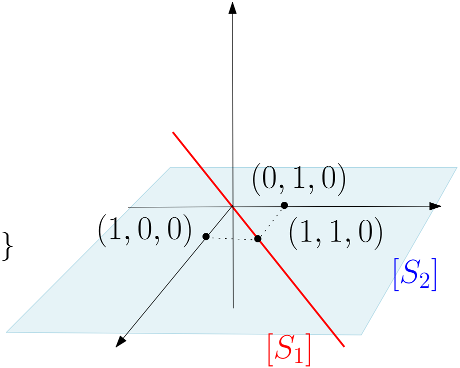
Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$

- $S_1 = \{(1, 1, 0)\}$

$$\begin{aligned}[S_1] &= \{\alpha.(1,1,0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0,\ x = y\}\end{aligned}$$

- $S_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

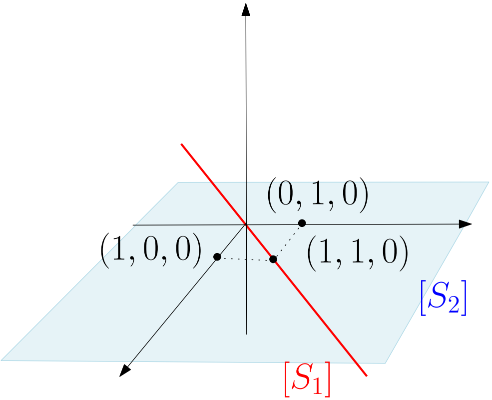
$$\begin{aligned}[S_2] &= \{\alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \} \\ &= \{(\alpha, \beta, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}\end{aligned}$$



Espaço Gerado

Obs: Mais geralmente, em $V = \mathbb{R}^3$.

- Se $u \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ e $S_1 = \{u\}$, então $[S_1]$ é a reta que passa por u e pela origem.
- Se $u, v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, um deles não é múltiplo escalar do outro e $S_2 = \{u, v\}$, então $[S_2]$ é o plano que passa por u, por v e pela origem.



Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço Gerado

Teorema Sejam $(V, +, .)$ um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Então $[S]$ é um subespaço de V.

Prova: $u \in [S] \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

sv_1. $[S] \neq \emptyset$. De fato, basta tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ e temos $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n = 0$. Portanto $0 \in [S]$.

sv_2. $[S]$ é fechado para $+$. Sejam $u, v \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

$v = \beta_1.v_1 + \beta_2.v_2 + \cdots + \beta_n.v_n$

Logo $u + v = (\alpha_1 + \beta_1).v_1 + (\alpha_2 + \beta_2).v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n).v_n \in [S]$.

Espaço gerado

sv_3. $[S]$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Logo $\alpha.u = (\alpha\alpha_1).v_1 + (\alpha\alpha_2).v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n).v_n \in [S]$. $\leftarrow$ M3,M1

Portanto $[S]$ é um subespaço de V.

$\square$

O subespaço $[S]$ de V é chamado **subespaço gerado** por S. Os elementos de S são chamados **geradores** de $[S]$.

Notações: $[S]$, $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ger(S), ger$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\langle S\rangle$, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$.

Espaço gerado

sv_3. $[S]$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Logo $\alpha.u = (\alpha\alpha_1).v_1 + (\alpha\alpha_2).v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n).v_n \in [S]$. $\leftarrow$ M3,M1

Portanto $[S]$ é um subespaço de V.

$\square$

O subespaço $[S]$ de V é chamado **subespaço gerado** por S. Os elementos de S são chamados **geradores** de $[S]$.

Notações: $[S]$, $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ger(S), ger$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\langle S \rangle$, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Espaço gerado

sv_3. $[S]$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Logo $\alpha.u = (\alpha\alpha_1).v_1 + (\alpha\alpha_2).v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n).v_n \in [S]$. $\leftarrow$ M3,M1

Portanto $[S]$ é um subespaço de V.

$\square$

O subespaço $[S]$ de V é chamado **subespaço gerado** por S. Os elementos de S são chamados **geradores** de $[S]$.

Notações: $[S]$, $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ger(S), ger$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\langle S \rangle$, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Espaço gerado

sv_3. $[S]$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Logo $\alpha.u = (\alpha\alpha_1).v_1 + (\alpha\alpha_2).v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n).v_n \in [S]$. $\leftarrow$ M3,M1

Portanto $[S]$ é um subespaço de V.

$\square$

O subespaço $[S]$ de V é chamado **subespaço gerado** por S. Os elementos de S são chamados **geradores** de $[S]$.

Notações: $[S]$, $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ger(S), ger$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\langle S \rangle$, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Espaço gerado

sv_3. $[S]$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Logo $\alpha.u = (\alpha\alpha_1).v_1 + (\alpha\alpha_2).v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n).v_n \in [S]$. $\leftarrow$ M3,M1

Portanto $[S]$ é um subespaço de V.

$\square$

O subespaço $[S]$ de V é chamado **subespaço gerado** por S. Os elementos de S são chamados **geradores** de $[S]$.

Notações: $[S]$, $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ger(S), ger$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\langle S \rangle$, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Espaço gerado

sv_3. $[S]$ é fechado para .. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in [S]$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_n.v_n$

Logo $\alpha.u = (\alpha\alpha_1).v_1 + (\alpha\alpha_2).v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n).v_n \in [S]$. $\leftarrow$ M3,M1

Portanto $[S]$ é um subespaço de V.

$\square$

O subespaço $[S]$ de V é chamado **subespaço gerado** por S. Os elementos de S são chamados **geradores** de $[S]$.

Notações: $[S]$, $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, ger(S), ger$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\langle S \rangle$, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Exemplos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[S] = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$.
   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S]$.
   Portanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[S] = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$.
   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S]$.
   Portanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[S] = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$.
   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S]$.
   Portanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[S] = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$.

   Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S]$.

   Portanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[S] = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0),(0,1)\}$.
   Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S]$.
   Portanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. Sejam $V = M_2(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$[S] = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0), (0,1)\}$.
   Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $(x, y) = x(1,0) + y(0,1) \in [S]$.
   Portanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$
- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.
- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$
- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.
- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.
  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.
  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.

  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.
  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.

- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.
  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$
- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.
- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.
  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Exemplos

3. $V = P_4(\mathbb{R})$

- $S_1 = \{1, x^3\} \Rightarrow [S_1] = \{\alpha.1 + \beta x^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 5x^3 \in [S_1]$
  - $1 + x^2 + x^3 \notin [S_1]$

- $S_2 = \{1 + x, x^2\} \Rightarrow [S_2] = \{\alpha.(1 + x) + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  $[S_2] = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
  - $2 + 2x + x^2 \in [S_2]$
  - $1 + 2x + x^2 \notin [S_2]$

  $[S_2] \subseteq [1, x, x^2]$.
- $S_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \Rightarrow [S_3] = P_4(\mathbb{R})$.
  Mais geralmente, $V = P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

Espaço Gerado: Propriedades

Teorema

g_1. $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S. Mais precisamente, se W é um subespaço de V tal que $S \subset W$, então $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

g_3. $[[S]] = [S]$.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

Prova:

g_1. Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Mostremos primeiramente que $S \subset [S]$. Para cada $v_i \in S$ temos

$v_i = 0.v_1 + \cdots + 1.v_i + \cdots + 0.v_n$.

Portanto v_i é combinação linear dos elementos de S, ou seja, $v_i \in [S]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Teorema

g_1. $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S. Mais precisamente, se W é um subespaço de V tal que $S \subset W$, então $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

g_3. $[[S]] = [S]$.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

Prova:

g_1. Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Mostremos primeiramente que $S \subset [S]$. Para cada $v_i \in S$ temos

$$v_i = 0.v_1 + \cdots + 1.v_i + \cdots + 0.v_n.$$

Portanto v_i é combinação linear dos elementos de S, ou seja, $v_i \in [S]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Teorema

g_1. $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S. Mais precisamente, se W é um subespaço de V tal que $S \subset W$, então $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

g_3. $[[S]] = [S]$.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

Prova:

g_1. Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Mostremos primeiramente que $S \subset [S]$. Para cada $v_i \in S$ temos

$v_i = 0.v_1 + \cdots + 1.v_i + \cdots + 0.v_n$.

Portanto v_i é combinação linear dos elementos de S, ou seja, $v_i \in [S]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1. S \subset W, W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1 . S \subset W, W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.
Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1: S \subset W,\ W$ sv $\Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.
($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1 . S \subset W, W$ sv $\Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

$(\subseteq)$ Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1 .\ S \subset W,\ W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.
Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W,\ W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.
($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W, W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

$(\subseteq)$ Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W,\ W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.
Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W, W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.
($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W, W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.
Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W, W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.
($\subseteq$) Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

Seja W um subespaço que contém $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Queremos mostrar que $W \supset [S]$. Mas como W é subespaço, então W é fechado para soma e para a multiplicação por escalar, logo toda combinação linear de elementos de W está em W. Em particular toda combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pertence a W, ou seja, $[S] \subset W$.

g_2. Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

Se $S_1 \subset S_2 \subset [S_2]$, segue de g_1 que $[S_1] \subset [S_2]$. $\leftarrow g_1.\ S \subset W,\ W\ sv \Rightarrow [S] \subset W$

g_3. $[[S]] = [S]$. Exercício.

g_4. $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$.

$(\subseteq)$ Temos que $S_1 \subset [S_1] \subset [S_1] + [S_2]$ e $S_2 \subset [S_2] \subset [S_1] + [S_2]$. Logo $S_1 \cup S_2 \subset [S_1] + [S_2]$. Por g_1, $[S_1 \cup S_2] \subset [S_1] + [S_2]$.

Espaço Gerado: Propriedades

($\supseteq$) Seja $v \in [S_1] + [S_2]$. Então

$v = v_1 + v_2, v_1 \in [S_1],\ v_2 \in [S_2]$

Temos que $v_1 \in [S_1] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$ e $v_2 \in [S_2] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$

Como $[S_1 \cup S_2]$ é subespaço vetorial

$v = v_1 + v_2 \in [S_1 \cup S_2]$. $\square$

Obs: Para mostrar que $[S_1] = [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e $S_2 \subset [S_1]$ e aplicar g_1.

Espaço Gerado: Propriedades

$(\supseteq)$ Seja $v \in [S_1] + [S_2]$. Então

$v = v_1 + v_2, v_1 \in [S_1],\ v_2 \in [S_2]$

Temos que $v_1 \in [S_1] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$ e $v_2 \in [S_2] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$

Como $[S_1 \cup S_2]$ é subespaço vetorial

$v = v_1 + v_2 \in [S_1 \cup S_2]$. $\square$

Obs: Para mostrar que $[S_1] = [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e $S_2 \subset [S_1]$ e aplicar g_1.

Espaço Gerado: Propriedades

($\supseteq$) Seja $v \in [S_1] + [S_2]$. Então

$v = v_1 + v_2, v_1 \in [S_1],\ v_2 \in [S_2]$

Temos que $v_1 \in [S_1] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$ e $v_2 \in [S_2] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$

Como $[S_1 \cup S_2]$ é subespaço vetorial

$v = v_1 + v_2 \in [S_1 \cup S_2]$.

$\square$

Obs: Para mostrar que $[S_1] = [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e $S_2 \subset [S_1]$ e aplicar g_1.

Espaço Gerado: Propriedades

$(\supseteq)$ Seja $v \in [S_1] + [S_2]$. Então

$v = v_1 + v_2, v_1 \in [S_1],\ v_2 \in [S_2]$

Temos que $v_1 \in [S_1] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$ e $v_2 \in [S_2] \overset{g2}{\subset} [S_1 \cup S_2]$

Como $[S_1 \cup S_2]$ é subespaço vetorial

$v = v_1 + v_2 \in [S_1 \cup S_2]$.

$\square$

Obs: Para mostrar que $[S_1] = [S_2]$, basta mostrar que $S_1 \subset [S_2]$ e $S_2 \subset [S_1]$ e aplicar g_1.