

## Álgebra Linear - 2022.3

## Lista 1 - Espaços e subespaços Vetoriais

- 1) Para os conjuntos seguintes, determine se são espaços vetoriais reais, se a adição e multiplicação são as usuais.
- O conjunto dos polinômios de grau menor o igual a  $n$  (considerando o polinômio nulo, que não tem grau, pertencente a este conjunto).
  - O conjunto de todas as funções reais tais que  $f(0) = f(1)$ .
  - O conjunto das funções tais que  $f(0) = 1 + f(1)$ .
  - O conjunto das funções reais crescentes.
  - O conjunto das funções reais pares.
  - O conjunto das funções contínuas em  $[0, 1]$  tais que  $\int_0^1 f(x)dx = 0$
  - O conjunto das funções contínuas em  $[0, 1]$  tais que  $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$
  - O conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  que satisfaz a equação linear  $ax + by + cz = 0$ .
  - O conjunto das matrizes  $3 \times 3$  triangulares estritamente superiores, i.e., o conjunto das matrizes da forma:
 
$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- 2) Mostre que os seguintes conjuntos a seguir não são espaços vetoriais.
- O intervalo  $[0, 1]$  da reta real.
  - O conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ . Que objeto geométrico é esse?
  - O conjunto dos vetores  $(x, y, z)$  que satisfaz a equação linear  $ax + by + cz = d, d \neq 0$ . Que objeto geométrico é esse? Qual é a diferença com a questão 1. (h)?
  - O conjunto do plano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (t, t^2), t \in \mathbb{R}\}$ .
- 3) Seja  $V$  o conjunto de todos os pares ordenados  $(x_1, x_2)$  de números reais. Determine se  $V$  é um espaço vetorial se a soma (" $+$ ") e o produto escalar são **definidos** das formas abaixo. (Desconsidere a soma e multiplicação por escalar usuais.)
- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$
  - $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$
  - $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$
  - $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$
  - $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2), a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$
- 4) Dados os espaços vetoriais  $V_1, V_2$  considere o conjunto  $V = V_1 \times V_2$  (produto cartesiano de  $V_1$  por  $V_2$ ), cujos elementos são os pares ordenados  $v = (v_1, v_2)$ , com  $v_1 \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$ . Defina operações que tornem  $V$  um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.
- 5) Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $\mathbf{v} \in V$  um elemento qualquer de  $V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  um número real. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que:
- $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = 3\mathbf{v}$ ;
  - $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;
  - $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ;
  - se  $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , então  $\alpha = 0$  ou  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- 6) Defina a média  $\mathbf{u} \star \mathbf{v}$  entre dois vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  no espaço vetorial  $V$  pondo  $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ . Prove que  $(\mathbf{u} \star \mathbf{v}) \star \mathbf{w} = \mathbf{u} \star (\mathbf{v} \star \mathbf{w})$  se e somente se  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ .
- 7) Seja  $V$  um espaço vetoriais real. Verifique que  $V$  e  $\{0\}$  são subespaços de  $V$
- 8) Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?
- O conjunto  $X \subset \mathbb{R}^3$  formado pelos vetores  $v = (x, y, z)$  tais que  $z = 3x$  e  $x = 2y$ .
  - O conjunto  $Y \subset \mathbb{R}^3$  formado pelos vetores  $v = (x, y, z)$  tais que  $xy = 0$ .
  - O conjunto  $\mathbb{F} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  formado pelas funções  $f$  tais que  $f(x+1) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
  - O conjunto dos vetores  $v \in \mathbb{R}^5$  que tem duas ou mais coordenadas nulas.
  - O conjunto dos vetores  $v \in \mathbb{R}^3$  que tem pelo menos uma coordenada  $\geq 0$ .
  - O conjunto dos vetores  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $x^3 + 3x = y^2 + 3y$ .
- 9) Quais dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  são subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^3$ ?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ .
  - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ .
  - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ .
  - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$

10) Seja  $V$  um espaço vetoriais real. Sejam  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços vetoriais de  $V$ . Mostre que  $W_1 \cap W_2$  é, ainda, um subespaço vetorial de  $V$ .

11) Seja  $S$  o conjunto das funções  $y$  satisfazendo a equação

$$2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

(a) Mostre que o conjunto  $S$  é não vazio.

(b) Mostre que  $S$  é um subespaço do espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .