Álgebra Linear - 2022.3

Lista 2 - Dependência e Independência Linear, Bases e Soma Direta

1) Exiba três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades: nenhum deles é múltiplo do outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e $\mathbb{R}^3$ não é gerado por eles.

2) Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Assinale V(verdadeiro) ou F(falso) e justifique sua resposta.
   (a) O vetor $w = (1, -1, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.
   (b) Se $X \subset Y$ então $[X] \subset [Y]$.
   (c) Se $[X] \subset [Y]$ então $X \subset Y$.

4) Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando o primeiro vetor é combina ção linear dos vetores restantes:
   (a) $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1; x^3; x^2 + 3x; x^2 + 1 \in \mathcal{P}_4$.
   (c) $(1, 3, 5, 7), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$

5) Para cada uma das seguintes coleções de vetores, determine quando os vetores são linearmente independentes:
   (a) $(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) $(1, 2), (3, 5), (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) $(2, 5, -3, 6), (1, 0, 0, 1), (4, 0, 9, 6) \in \mathbb{R}^4$.
   (d) $x^2 + 1, x + 1, x^2 + x \in \mathcal{P}_3$.
   (e) $2x^2 + 3, x^2 + 1, 1 \in \mathcal{P}_3$.
   (f)) $2x^2 + 3, x^3 + 1, x^3 + x^2, 1 \in \mathcal{P}_3$.

6) Encontre uma base para os seguintes subespaços e estenda a uma base de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ conforme corresponda.
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.
   (b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = x + y \text{ e } z = x - y\}$.
   (c) O plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 5z = 0\}$.
   (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ e } 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

7) Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios reais de grau menor igual que n. Para cada um dos itens seguintes seja S o conjunto dos polinômios em $\mathcal{P}_k$ satisfazendo a condição dada. Determine se S é um subespaço de $\mathcal{P}_n$. Se S for um subspaço calcule a dimensão de S.
   (a) $p(0) = 0$
   (b) $p'(0) = 0$
   (c) $p''(0) = 0$
   (d) $p'(0) + p(0) = 0$
   (e) O conjunto dos polinômios de grau igual ou menor que k. (com $k < n$)

8) Determine se os conjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$. Em caso afirmativo exiba uma base:
   (a) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = c$.
   (b) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = 0 = c$.
   (c) $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a = 0$.

9) Mostre que os polinômios $1 - t^3, (1 - t)^2, 1 - t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau menor igual a 3.

10) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$, gerado por $(1, 0, 0)$ e W o subespaço gerado por$(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

11) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, , t) : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
    $W_2 = \{(x, y, z, , t) : x - y - z + t = 0\}$
   (a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
   (b) Determine $W_1 + W_2$
   (c) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.
   (d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

12) a) Dado o subespaço $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0\}$ ache um subespaço V_2 tal que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.
    b) Dê exemplos de dois subespaços de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. A soma é direta?

13) Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:
    $U = [(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)]$
    $W = [(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)]$
   (a) Ache uma base e a dimensão de $U + W$ e $U \cap W$.
   (b) Mostre que a relação $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$ é satisfeita neste caso.