Base, Dimensão e Coordenadas — AlgLin

Professor responsável: Cristian Favio Coletti

Monitor: Rafael Polli Carneiro

3quad - 2022

Sumário

Conceito importante **1**

Exemplo 1 1

Exemplo 2 3

Exemplo 3 3

Exemplo 4 4

Conceito importante

Seja V um espaço vetorial sobre os reais e $B \subseteq V$ um subconjunto de V (B podendo ser infinito). Então, B será uma *base* do espaço vetorial V, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. Todo subconjunto fininto $S \subseteq B$ deve ser L. I., i.e., dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq B$ deve-se ter
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

2. O conjunto B deve gerar o espaço vetorial V:
$$V = [S] = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i;\ m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ilustraremos, a seguir, alguns exemplos de bases.

Exemplo 1

Consideremos o espaço vetorial sobre os reais dos polinômios de grau menor ou igual a 2:

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Mostremos que o subconjunto $B = \{1+x, 1-x, 1-x^2\}$ forma uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Para que B seja uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ devemos mostrar que

1. B é um conjunto L. I.;
2. B gera o espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Comecemos mostrando que B é L. I.:

$$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x^2) = 0 \iff (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)x + (-\alpha_3)x^2 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Da relação acima concluímos que

$$\alpha_3 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 \ \text{ e } \ \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3,$$

ou seja,

$$\alpha_3 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.$$

Resta mostrarmos que B gera o espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Note que

$$p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \iff p = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

para $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ fixado. Todavia, sabemos que todo polinômio pertencente a $[B]$ pode ser escrito como $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)x + (-\alpha_3)x^2$, para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Resta checarmos se conseguimos achar escalares, tal que

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)x + (-\alpha_3)x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Para a igualdade acima ser válida devemos ter

$$\begin{cases} \alpha_3 = -a_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = a_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - a_2 = a_0. \end{cases}$$

Somando a segunda com a terceira igualdade, obtemos a solução

$$\alpha_3 = -a_2, \ \alpha_1 = \frac{a_0 + a_2}{2} \ \text{ e } \ \alpha_2 = \frac{-2a_1 + a_0 + a_2}{2}.$$

Logo, para qualquer polinômio p, de grau menor igual a dois, podemos encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que p pode ser escrito como combinação linear dos polinômios de B. Consequentemente, B é uma base do espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 2

Mostremos que $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ é uma base do espaço euclideano $\mathbb{R}^2$. Primeiramente, observe que, para todo ponto $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, vale

$$\begin{aligned} u &= (x,y) \\ &= x(1,0) + y(0,1) \\ &= x(1,1-1) + y(0,1) \\ &= x(1,-1) + (x+y)(1,1). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathbb{R}^2 \subseteq [B] \subseteq \mathbb{R}^2,$$

e, com isto, concluímos que B gera o espaço $\mathbb{R}^2$.

Resta provarmos que B é L. I.. Dados os escalares α_1, α_2, temos que a igualdade

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (0,0)$$

se, e somente se, tivermos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = -1. \end{cases}$$

Tal sistema linear admite apenas a solução trivial como resposta:

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (0,0) \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

e, portanto, o conjunto B é um conjunto linearmente independente.

Com isto provamos que B é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3

Neste Exemplo ilustraremos como proceder para completar um conjunto $S \subseteq V$, com V um espaço vetorial sobre os reais, tal que tenhamos uma base de V, a partir de S.

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^3$ e o vetor $(1,1,-1)$. Queremos encontrar, por exemplo, um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que B forme uma base do espaço euclideano, e $(1,1,-1) \in B$.

Sabemos, pela dimensão de $\mathbb{R}^3$, que B deve ter a seguinte cara:

$$B = \{(1,1,-1),(u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\}.$$

Se B for L. I. então teremos garantido que B formará uma base de $\mathbb{R}^3$. Note que para B ser L. I. devemos ter a condição

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Esta condição pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ -1 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

o qual, aplicando-se a transposta, fornece

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Agora, note que se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

for triangularizável (mais explicitamente, se for uma matriz superior triangular), teremos que a condição acima será verdadeira. Portanto, uma forma de encontrarmos B seria determinarmos, $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$, tal que consigamos a matriz acima já em sua forma escalonada. Um exemplo simples seria tomarmos

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1, \quad \text{e} \quad v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 1.$$

Exemplo 4

Fixemos o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a três

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3;\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

e os subespaços

$$U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});\ p(0) = p(1) = 0\} \quad \text{e} \quad V = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});\ p(-1) = 0\}.$$

Neste Exemplo encontraremos bases bara os subespaços $U, V, U \cap V, U + V$.

(i) Calculemos uma base para o subespaço U. Por definição:

$$p \in U \iff p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \ \text{ e } \ p(0) = p(1) = 0.$$

Da restrição $p(0) = p(1) = 0$ obtemos

$$a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0 \implies a_3 = -a_2 - a_1.$$

Portanto,

$$p \in U \iff p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + (-a_2 - a_1)x^3 = a_1(x - x^3) + a_2(x^2 - x^3).$$

Com isto, concluímos que tomando o conjunto

$$B_U = \{x - x^3, x^2 - x^3\},$$

obtemos

$$U = [B_U],$$

restando, apenas, provar que B_U é L. I.. Contudo, esta é a parte mais simples, já que

$$p \in [B_U] \iff p(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + (-\alpha_2 - \alpha_1)x^3 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

(ii) Calculemos uma base para o subespaço V. Por definição:

$$p \in V \iff p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \text{e} \quad p(-1) = 0.$$

Da restrição $p(-1) = 0$ obtemos que

$$p \in V \iff a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \iff a_3 = a_0 - a_1 + a_2.$$

Logo, tomando

$$B_V = \{1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3\}$$

obtemos que B_V é uma base de V, pois

$$V = [B_V]$$

e B_V é L. I..

(iii) Encontremos uma base para o subespaço $U \cap V$. Tal espaço será dado pela condição:

$$p \in U \cap V \iff p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \text{e} \quad p(0) = p(1) = p(-1) = 0,$$

ou seja, $p \in U \cap V$ quando temos as restrições:

$$a_0 = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad \text{e} \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0.$$

Destas restrições concluímos que

$$p \in U \cap V \iff p(x) = a_1 x - a_1 x^3,$$

o qual fornece a base

$$B_{U \cap V} = \{x - x^3\}.$$

(iv) Finalmente, estudemos a soma dos espaços $U + V$. Primeiro, notemos que

$$B_U = (B_U \setminus B_{U \cap V}) \sqcup B_{U \cap V} \quad \text{e} \quad B_V = (B_V \setminus B_{U \cap V}) \sqcup B_{U \cap V},$$

com $\sqcup$ a união disjunta. Claramente, temos que

$$(B_U \setminus B_{U\cap V}) \sqcup B_{U\cap V} \sqcup (B_V \setminus B_{U\cap V})$$

é um conjunto L. I. e

$$U + V = [B_U \setminus B_{U\cap V}] \oplus B_{U\cap V} \oplus [B_V \setminus B_{U\cap V}].$$

Portanto, uma base para $U + V$ é o conjunto

$$B_{U+V} = \{x^2 - x^3, x - x^3, 1 + x^3, x^2 + x^3\}$$