Combinações Lineares – AlgeLin

Professor responsável: Cristian Favio Coletti

Monitor: Rafael Polli Carneiro

3quad - 2022

Sumário

Algumas Definições

Abaixo algumas definições e resultados que iremos usar:

Definição 1 (Combinação Linear)**.** Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ uma sequência de vetores. Dizemos que o vetor $u \in V$ é *combinação linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i i_i.$$

Definição 2 (Espaço Vetorial Gerado por S)**.** Seja V um espaço vetorial e $S \subseteq V$ um subconjunto não nulo. Então, denotaremos por $[S]$ como o subespaço vetorial de V cujos elementos podem ser escritos como uma combinação linear de elementos do conjunto S:

$$[S] = \left\{ w \in V;\ \exists v_1, \ldots, v_m \in S, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R},\ \text{tal que } w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \right\}.$$

Exercícios

A seguir resolveremos alguns exercícios para ilustrarmos alguns tópicos relacionados a Combinações Lineares.

Exercício 1

Consideremos o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois

$$\mathcal{P}_2 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^m;\ m \leq 2, a_0, \ldots, a_m, x \in \mathbb{R}\}$$

e os vetores

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = 1 + x \quad \text{e} \quad q_3(x) = 1 + x + x^2.$$

Prove que o polinômio $p(x) = 1 + x^2$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômio q_1, q_2, q_3.

Resolução: Para isto, devemos achar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale

$$p(x) = \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) + \alpha_3 q_3(x).$$

Façamos as contas:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= \alpha_1 1 + \alpha_2(1 + x) + \alpha_3(1 + x + x^2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_2 + \alpha_3) + x^2(\alpha_3). \end{aligned}$$

Esta igualdade pode ser interpretada como o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema assume como solução os valores

$$\alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1 = 1.$$

Logo,

$$p(x) = 1q_1(x) - 1q_2(x) + 1q_3(x).$$

Exercício 2

Neste Exercício ilustraremos o conceito de subespaços vetoriais gerados por um subconjunto.

(i) Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3:

$$\mathcal{P}_3 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3;\ a_0, a_1, a_2, a_3, x \in \mathbb{R}\,.\}$$

e

$$S = \{1, x, x^2, 1 + x^3\}$$

um subconjunto. Descreva o espaço gerado por S;

(ii) Agora consideremos o espaço das matrizes quadradas:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix};\ a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}.$$

e o subconjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

expresse o subespaço gerado por S.

Resolução: Para o item (i), de antemão sabemos que

$$p \in [S] \iff p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(1 + x^3), \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo,

$$p \in [S] \iff p(x) = (\alpha_0 + \alpha_3) + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

o qual nos garante que $[S]$ é o subespaço vetorial dos polinômios

$$[S] = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (1 - a_3)x^3;\ a_0, a_1, a_2, a_3, x \in \mathbb{R}\,. \right\}$$

Finalmente, para o item (ii), temos a relação

$$M \in [S] \iff \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

Em outras palavras:

$$[S] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercício 3

Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a três e o subespaço

$$W = \{p \in \mathcal{P}_3;\ p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Encontre, caso possível, um subconjunto finito $S \subseteq W$ tal que

$$[S] = W.$$

Resolução: Inicialmente, devemos escrever a cara dos elementos de $\mathcal{P}_3$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Agora, adicionando a restrição de que

$$p \in W \iff p \in \mathcal{P}_3 \text{ e } p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

obtemos que

$$p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Ou seja, da equação acima obtemos que

$$p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a_0 \in \mathbb{R} \text{ e } a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Portanto, $W = [S]$, com

$$S = \{p(x) = a_0;\ a_0 \in \mathbb{R}\}.$$