Dependência Linear — AlgLin

Professor responsável: Cristian Favio Coletti

Monitor: Rafael Polli Carneiro

3quad - 2022

Sumário

Definição de Dependência Linear e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma sequência de vetores no espaço V. Então, dizemos que a sequência de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em V é *linearmente independente*, ou simplesmente L. I., se, dados os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tivermos que a seguinte condição é satisfeita:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Em outras palavras, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é uma sequência L. I. de vetores em v se, e somente se, nenhum dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais.

De maneira análoga, dizemos que uma sequência $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de vetores em V é *linearmente dependente*, ou simplesmente L. D., se, e somente se, a sequência $v_1, v_2, \ldots, v_n$ não for L. I.. Ou seja, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são L. D. se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \iff \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tal que } \alpha_i \neq 0$$

Ilustremos agora casos de dependência e independência linear.

Exemplo 1

Dado o espaço das matrizes quadradas

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} ;\ a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostremos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são L. D. em $M_2(\mathbb{R})$.

Para isto devemos checar para quais valores dos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ temos a igualdade

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfeita. Manipulando a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isto, a igualdade acima pode ser reescrita como o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora precisamos resolver este sistema linear. Vamos resolvê-lo por escalonamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Do escalonamento obtemos:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}.$$

Desta forma, concluímos que a igualdade

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

admite infinitas soluções e, portanto, os vetores

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são L. D. em $M_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 2

Agora, fixemos o espaço das funções com primeira derivada contínua

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ é diferenciável e } f' \text{ é contínua } \}$$

e mostremos que as funções trigonométricas

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x)$$

são L. I. em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Novamente, devemos estudar as condições para que, dados escalares α_1, α_2, tenhamos a igualdade

$$\alpha_1 \sin + \alpha_2 \cos = 0.$$

Note que a igualdade acima equivale a condição

$$\alpha_1 \sin(t) + \alpha_2 \cos(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Tentemos transformar a igualdade acima em um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. Para isso, consideremos $t = 0$ e $t = \pi/2$:

$$\begin{aligned} t = 0 &\implies \alpha_1 \sin(0) + \alpha_2 \cos(0) = 0, \\ t = \pi/2 &\implies \alpha_1 \sin(\pi/2) + \alpha_2 \cos(\pi/2) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} t = 0 &\implies 0 + \alpha_2 = 0, \\ t = \pi/2 &\implies \alpha_1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Com isto obtemos que

$$\alpha_1 \sin + \alpha_2 \cos = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

e, portanto, as funções $\sin, \cos$ são L. I. no espaço $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exemplo 3

Consideremos, novamente, o espaço

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ é diferenciável e } f' \text{ é contínua }\},$$

e mostremos que as funções

$$f(x) = \cos(2x),\ g(x) = \cos^2(x),\ \text{ e } h(x) = \sin^2(x)$$

são L. D. em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Dados os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, para que as funções acima sejam L. D., devemos ter ao menos uma solução não trivial para a igualdade abaixo

$$\alpha_1 \cos(2x) + \alpha_2 \cos^2(x) + \alpha_3 \sin^2(x) = 0$$

Comecemos relembrando algumas identidades clássicas, válidas para funções trigonométricas:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \text{e} \ \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Destas identidades utilizaremos as igualdades:

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \quad \text{e} \ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

Sendo assim, podemos reescrever

$$\alpha_1 \cos(2x) + \alpha_2 \cos^2(x) + \alpha_3 \sin^2(x) = 0$$

como a igualdade

$$\alpha_1(2\cos^2(x) - 1) + \alpha_2 \cos^2(x) + \alpha_3(1 - \cos^2(x)) = 0$$

e, portanto,

$$(\alpha_3 - \alpha_1) + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\cos^2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Note, desta igualdade, que para

$$\alpha_1 = \alpha_3 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -\alpha_3$$

temos, para todo $x \in \mathbb{R}$, que

$$(\alpha_3 - \alpha_1) + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\cos^2(x) = 0 + 0\cos^2(x).$$

Consequentemente, a equação

$$(\alpha_3 - \alpha_1) + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\cos^2(x) = 0$$

não admite solução trivial, garantindo, assim, que as funções f, g, h em $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sejam vetores L. D..