Subespaços Vetoriais – AlgeLin

Professor responsável: Cristian Favio Coletti

Monitor: Rafael Polli Carneiro

3quad - 2022

Sumário

Subespaços Vetoriais

Iniciemos apresentando a definição de Subespaços Vetoriais:

Definição 1. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos reais [1] e $U \subseteq V$ um subconjunto de V não nulo. Então, chamaremos U de *subespaço vetorial* de V se as três condições forem satisfeitas:

(P1) O elemento neutro $0 \in V$ deve pertencer, também, ao subconjunto U;

(P2) Para todos vetores $u, v \in U$ devemos ter $u + v \in U$;

(P3) Para todo escalar α e para todo vetor $u \in U$ devemos ter $\alpha u \in U$.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de subespaços vetoriais, checando sempre estas três propriedades.

[1] Quando dizemos que V é um espaço vetorial estaremos sempre nos referindo a terna $(V, +, \cdot)$, onde $+$ é o operador de soma de vetores e $\cdot$ a multiplicação de vetores por escalar. Usualmente nos referimos a espaços vetoriais por apenas o conjunto que forma a terna, por simplicidade mesmo. Também, dado um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e um vetor $v \in V$, escreveremos sempre a multiplicação por escalar como αv ao invés de $\alpha \cdot v$. Observe que isto são convenções para tornar a leitura mais fluída, mas caso prefira deixar as coisas explícitas, sinta-se a vontade =D

Exemplo 1

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n,

$$\mathcal{P}_n = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m;\ m \leq n \ \text{ e } \ a_0, a_1, \ldots, a_m, x \in \mathbb{R}\},$$

munido das operações usuais dos polinômios, isto é, para todo polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, com $m \leq n$, e para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, a soma de polinômios é dada por

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i$$

e a multiplicação por escalar é dada por

$$(\alpha p)(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha a_i x^i.$$

Mostremos que o subconjunto

$$\mathcal{P}_n^* = \{p \in \mathcal{P}_n;\ p(0) = 0\} \subseteq \mathcal{P}_n$$

munido das operações de $\mathcal{P}_n$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$. Para isto, devemos checar as três propriedades expostas na Definição 1:

(P1) Esta propriedade é imediata. Basta olharmos para o polinômio constante e nulo $0(x) = 0$. Obviamente este polinômio quando calculado na origem também é zero e, portanto, pertence ao subconjunto $\mathcal{P}_n^*$;

(P2) Dados dois polinômios quaisquer e de grau máximo igual a $m \leq n$, $p, q \in \mathcal{P}_n^*$. Precisamos provar que $(p+q)(0) = 0$. Todavia, decorre que, por definição, temos

$$p(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad q(0) = 0,$$

portanto

$$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0,$$

nos garantindo que $p + q \in \mathcal{P}_n^*$;

(P3) Finalmente, dado um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{P}_n^*$ um polinômio, então

$$(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = 0.$$

Consequentemente, $\alpha p \in \mathcal{P}_n^*$

Logo, temos que $\mathcal{P}_n^*$ é um subespaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n.

Exemplo 2

Seja $\mathbb{R}^3$ o espaço vetorial euclideano

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z);\ x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Mostremos que o subconjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\},$$

munido das operações do próprio espaço euclideano de dimensão 3 é um um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Chequemos os três itens da Definição 1:

(P1) O elemento neutro $0 = (0, 0, 0)$ satisfaz a condição $0+0+0 = 0$. Logo, também temos $0 \in S$;

(P2) Para todo vetor $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in S$, temos que

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

e

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) &= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)\\ &= 0 + 0.\end{aligned}$$

Ou seja, temos garantido que $u + v \in S$;

(P3) Agora devemos checar se ao multiplicarmos um vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in V$, por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer, temos, ainda, que $\alpha v \in V$. Para isso, sabemos que

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$$

logo

$$\alpha v_1 + \alpha v_2 + \alpha v_3 = \alpha(v_1 + v_2 + v_3) = \alpha 0 = 0.$$

Com isto concluímos o desejado.

Como S satisfaz as três propriedades da Definição 1, então S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3

Consideremos o espaço das funções contínuas

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ é contínua }\}$$

e mostremos que o subconjunto

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R});\ \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\ \mathrm{d}x = -\lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x. \right\}$$

é, de fato, um subsepaço vetorial.

Primeiramente, sabemos que a função

$$\begin{aligned} 0 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

é contínua e

$$\int_a^0 0(x)\ \mathrm{d}x = 0, \forall a < 0,$$

tal qual

$$\int_0^a 0(x)\ \mathrm{d}x = 0, \forall a > 0.$$

Portanto,

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 0(x)\ \mathrm{d}x = -\lim_{a \to \infty} \int_0^a 0(x)\ \mathrm{d}x$$

e $0 \in S$. Com isso temos que o elemento neutro pertence, como desejávamos, ao subconjunto S

Agora, sejam as funções $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Mostremos que $f + g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Sabemos, já do Cálculo 1 que $f + g$ é uma função contínua. Basta checarmos a condição dos limites das integrais de Riemann. Lembremos que

$$\int_0^a (f+g)(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^a g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{a \to \infty} \int_0^a (f+g)(x)\ \mathrm{d}x &= \lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{a \to \infty} \int_0^a g(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\ \mathrm{d}x - \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 g(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 (f+g)(x)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Com isto temos que $f + g$ também pertence ao subconjunto S.

Finalmente, a útilma propriedade que nos resta provar: para todo $f \in S$ e para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, vale $\alpha f \in S$. Sabemos, por f pertencer ao conjunto S, que f é uma função contínua e, portanto, αf também é contínua. Só precisamos provar que αf satisfaz a restrição para pertencer a S. De fato

$$\begin{aligned} \lim_{a \to \infty} \int_0^a (\alpha f)(x)\ \mathrm{d}x &= \lim_{a \to \infty} \alpha \int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\alpha \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 (\alpha f)(x)\, \mathrm{d}x &= \lim_{a \to -\infty} \alpha \int_a^0 f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \alpha \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Com isto obtemos o desejado:

$$
\lim_{a \to \infty} \int_0^a (\alpha f)(x)\, \mathrm{d}x = - \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\, \mathrm{d}x.
$$

Logo, $\alpha f \in S$ e S é um subespaço vetorial do espaço das funções contínuas na reta real.