

Nome: _____

PROVA 2 (05/12/2022)

Álgebra Linear

Prof. Cristian F. Coletti

3o Quadrimestre 2022

Exercício	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É permitido consultar uma folha de anotações. É terminantemente proibido consultar o colega e usar celular e calculadora.

Exercícios

Ex. 1 — Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(ax + b) = \frac{ax^2}{2} + bx$$

- (1 pt.) Verifique que T é uma transformação linear. Justifique a sua resposta.
- (2 pts.) Calcule a matriz de T com relação às bases $\mathcal{B} = \{-1, 2x - 1\}$ e $\mathcal{C} = \{2, -x + 1, x^2 + 1\}$ respectivamente. Justifique a sua resposta.
- (1pt.) Diga se a aplicação T é injetora. Diga se a aplicação T é sobrejetora. Em ambos casos justifique a sua resposta.

Ex. 2 — Seja $\mathcal{B} = \{1 + x, x - x^2, x^2 - 1\}$ uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1 + x) = 3 + 3x - 2x^2$, $T(x - x^2) = 2(x - x^2)$ e $T(x^2 - 1) = x - 1$.

- (2 pts.) Calcule os autovalores de T .
- (1,5 pts.) Calcule os autoespaços associados a cada um dos autovalores de T .
- (1,5 pts.) Diga se T é diagonalizável ou não e justifique a sua resposta.
- (1pt.) T é inversível? Justifique a sua resposta.

Ex. 3 — Bonus

(1pt.) Decida se a seguinte transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - 2y + 2z, y - 4z, z).$$

Decida se T é diagonalizável. Justifique a sua resposta.

Dica Considere a base canônica de \mathbb{R}^3 .

Ex. 4 — Bonus

(1 pt.) Toda vez que a máquina de café da sala de espera de um dado hospital deixa de funcionar ela é consertada no dia seguinte com probabilidade $4/5$. Se a máquina de café está funcionando, ela não funcionará no dia seguinte com probabilidade $1/10$. O funcionamento da máquina pode ser modelado de forma simplória por uma cadeia de Markov com matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 9/10 & 1/10 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

e espaço de estado $S = \{1, 2\}$. Nesta modelagem assumimos que cada unidade de tempo corresponde a um dia.

Assumindo que a máquina está funcionando no dia de inauguração do hospital, a probabilidade da máquina estar funcionando após n unidades de tempo é dada pela expressão

$$(P^n)_{11}$$

onde P^n representa a n -ésima potência da matriz de transição P .

- (a) Calcule a probabilidade da máquina estar funcionando no dia do primeiro aniversário da inauguração do hospital.

Observação Não é permitido o uso de calculadora.