

Nome: \_\_\_\_\_

**PROVA 1 (20/03/2024)**  
Álgebra Linear  
1o Quadrimestre 2024

| Exercício | Pontos |
|-----------|--------|
| 1         |        |
| 2         |        |
| 3         |        |
| 4         |        |
| Total     |        |

- Tente resolver todas as questões, mas priorize a qualidade da sua resolução. Boa qualidade em pouca quantidade é melhor do que muita quantidade com pouca qualidade.
- É permitido consultar uma folha de anotações. É terminantemente proibido consultar o colega e usar celular e calculadora.

## Exercícios

Ex. 1 — Resolva os exercícios abaixo.

(a)(Valor: 1 ponto) Seja  $V = \mathbb{R}^2$ . Defina uma operação de adição em  $V$  por

$$(u, v) \oplus (x, y) = (u + x + 1, v + y + 1)$$

para todo  $(u, v)$  e  $(x, y)$  em  $V$ . Defina uma operação de multiplicação por escalar em  $V$  por

$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x, y) \in V$ . Com essas operações o conjunto  $V$  não é um espaço vetorial. Os axiomas de espaço vetorial que não são verificados são  $\text{---}$  e  $\text{---}$ . Justifique sua resposta.

(b)(Valor: 1 ponto) Considere o espaço vetorial  $V = (0, \infty)$  com a adição e o produto por escalar em  $V$  dados por

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha.$$

Dado  $x \in V$ , apresente o inverso aditivo de  $x$  (com respeito à adição  $\oplus$ ). Justifique sua resposta.

Ex. 2 — (Valor 2 pontos) Seja  $V_1$  o subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^4$  dado por

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -7x + 2y + 3z - 11w = 0\}.$$

Encontre um subespaço  $V_2$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que

$$\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2.$$

Isto é, encontre  $V_2$  tal que  $\mathbb{R}^4$  se escreva como soma direta de  $V_1$  e  $V_2$ . Justifique sua resposta.

**Ex. 3** — Seja  $W \subset \mathcal{P}_3$  definido por  $W = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = p(1)\}$

(a)(Valor: 1,5 pontos) Verifique que  $W$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_3$ . Justifique sua resposta.

(b)(Valor: 1,5 pontos) Exiba uma base de  $W$ . Justifique sua resposta.

(c)(Valor: 1 ponto) Seja  $U = \{p \in \mathcal{P}_3 : p'(1) = 0\}$ .  $U$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_3$ . Qual é a dimensão de  $U \cap W$ ? Justifique sua resposta.

**Ex. 4** — (Valor 2 pontos) Considere o seguinte sistema de equações. Resolva o seguinte sistema, com  $a, b, c$  constantes, pelo método de eliminação Gaussiana e encontre a inversa da matriz de coeficientes pelo método de eliminação Gaussiana .

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases} \quad (1)$$