Probabilidade

Cristian Coletti
Daniel Miranda
Rafael Grisi
UFABC
16 de fevereiro de 2024

Sumário

1 Medidas de Probabilidade

1.1 Definição (Probabilidade Finitamente Aditiva) *Se $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra em Ω, então $\mathbf{P} : \mathcal{F}_0 \longrightarrow [0,1]$ é dita uma* ***probabilidade finitamente aditiva*** *ou* ***atribuição de probabilidade*** *em $\mathcal{F}_0$ se*

$\boxed{1}$ $\mathbf{P}[\Omega] = 1$

$\boxed{2}$ $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$ *para todos os conjuntos $A, B \in \mathcal{F}_0$ disjuntos.*

Podemos na definição anterior trocar a hipótese de aditividade finita por aditividade enumerável. Podemos fazer isso para eventos numa álgebra ou numa σ-álgebra.

1.2 Definição (Pré-Medida de Probabilidade) *Se $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra em Ω, então $\mathbf{P} : \mathcal{F}_0 \longrightarrow [0,1]$ é dita uma* ***pré-medida de probabilidade*** *em $\mathcal{F}_0$ se*

$\boxed{1}$ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

$\boxed{2}$ $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$ *para todos conjuntos disjuntos* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ *tais que* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_0$.

1.3 Definição *Uma* ***medida*** *em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:*

$\boxed{1}$ $\mu(\emptyset) = 0$

$\boxed{2}$ *para toda sequência de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, temos que*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

*Essa propriedade é denominada de $\sigma -$ **aditividade**.*

Se nas Definições 1.1 e 1.2 removermos a hipótese $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ temos uma medida finitamente aditiva e uma pré-medida respectivamente.

1.4 Definição *Se $\mathbf{P}$ é uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, então $\mathbf{P}$ é denominada de **medida de probabilidade**.*

*Nesse caso a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é denominada de **espaço de probabilidade**.*

1.5 Definição (Medidas Finitas e σ-finitas) *Dado* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *um espaço de medida.*

a *Se* $\mu(\Omega) < \infty$ *então* μ *é dita* ***medida finita****;*

b *Se* $\mu(\Omega) = \infty$ *então* μ *é dita* ***medida infinita****;*

c *Se existem conjuntos em* $\mathcal{F}$ $A_1, A_2, \ldots$ *tais que* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *e* $\mu(A_k) < \infty$ *então* μ *é dita medida* σ-***finita***

Note que toda medida de probabilidade é σ-finita.

1.6 Exemplo (Espaços de Probabilidade Discretos) *Seja* Ω *um conjunto enumerável, isto é, finito ou infinito enumerável. Seja* $\mathcal{F}$ *o conjunto de todos os subconjuntos de* Ω *e seja uma função* $p : \Omega \longrightarrow [0,1]$ *satisfazendo*

$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. *Definimos então*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(w) \text{ com } p(\omega) \geq 0 \text{ e } \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$$

Esta é a medida de probabilidade mais geral que podemos construir neste espaço.

Quando Ω *é um conjunto finito, e* $p(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$ *onde* $|\Omega|$ *denota o número de pontos em* Ω*, temos o que se denomina espaço de probabilidade finito equiprovável.* $\triangleleft$

1.7 Exemplo *Seja* $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e dado* $\lambda > 0$ *e definida* $p : \Omega \longrightarrow [0,1]$ *por*

$$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1,$$

a medida

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k \in A} p(k),$$

é uma medida de de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. $\triangleleft$

1.8 Exemplo (Lançamento de Moedas) *Vamos considerar o experimento de lançar n moedas. Representando* coroa *por 0 e* cara *por 1, podemos definir o espaço amostral por*

$$\Omega = \{0,1\}^n = \{\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_k \in \{0,1\}, k = 1, \ldots, n\}.$$

Dado $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega$, defina $N(\omega) = a_1 + \cdots + a_n$ ($N(w)$ representa o total de $1's$ em ω)

Fixe agora $q \in (0,1)$ e defina

$$p(\omega) = q^{N(\omega)}(1-q)^{n-N(\omega)}.$$

Fica como exercício mostrar que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

e portanto pode ser usada para definir um espaço de probabilidade. ◁

1.9 Proposição (Propriedades da Probabilidade)

1. $\mathbf{P}(A^{c}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
2. *$A \subseteq B$ implica* $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$. (***monotonicidade***)
3. *Dados eventos A e B então* $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ (***sub-aditividade***)
4. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ (*σ-**sub-aditividade***)
5. $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B]$; (***Inclusão-exclusão***)
6. $\mathbf{P}(A \triangle B) \geq \max\{\mathbf{P}(A - B), \mathbf{P}(B - A)\}$

Demonstração.

1 $\Omega = A \cup A^{\mathsf{c}}$. *Logo,* $\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^{\mathsf{c}})$. *Agora basta utilizar que* $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

2 *Use a decomposição* $B = A \cup (B \setminus A)$.

3 *Note que* $A \cup B$ *pode ser escrito como* $A \cup (B \setminus A)$. *Logo, pela monotonicidade da probabilidade, temos que* $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

4 *Exercício*

5 *Exercício* $\square$

1.1 Continuidade das Medidas de Probabilidade

1.10 Teorema (Continuidade da Probabilidade) *Dado uma sequência de eventos* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. *Então*

$\boxed{1}$ *Se* $A_n \uparrow A$, *então* $\mathbf{P}(A_n) \uparrow \mathbf{P}(A)$ *quando* $n \to \infty$.

$\boxed{2}$ *Se* $A_n \downarrow A$, *então* $\mathbf{P}(A_n) \downarrow \mathbf{P}(A)$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração. *Provaremos apenas a primeira propriedade.*

Dado uma sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots$. *Vamos começar transformando a união em união disjunta. Para isso definiremos uma sequência auxiliar de eventos: defina* $B_1 = A_1$ *e para* $k \geq 2$, *defina* $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.

Como $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ *então os conjuntos* B_n *são disjuntos e* $\bigcup_{n=1}^{j} B_n = \bigcup_{n=1}^{j} A_n = A_j$, *para* $1 \leq j \leq \infty$. *Logo*

$$A = \bigcup_k B_k$$

E assim $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^{n} B_k)$, *e como os conjuntos* B_k *são disjuntos temos que* $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)$, *por aditividade. Todas as somas parciais são limitadas superiormente por* 1. *Além disso, a sequência de somas parciais é* *não decrescente. Portanto, converge. Assim*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mathbf{P}(A).$$

1.11 Teorema *Dado $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos. Então*

$\boxed{1}$ $\mathbf{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbf{P}(A_n) \leq \limsup \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup A_n)$.

$\boxed{2}$ *Se $A_n \to A$ então $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. *Exercício.*

Dica do 1. *Observe as inclusões*

$$\liminf A_n \uparrow \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subset A_n \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \downarrow \limsup A_n$$

1.12 Teorema (Caracterizações da σ-aditividade) *Dado* $\mathbf{P} : \mathcal{F}_0 \to [0,1]$ *uma probabilidade finitamente aditiva numa álgebra* $\mathcal{F}_0$*. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. $\mathbf{P}$ *é uma pré-medida de probabilidade;*
2. $\mathbf{P}$ *é contínua por baixo. Isto é dados* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ *e* $A_n \uparrow A \in \mathcal{F}_0$ *então* $\mathbf{P}(A_n) \uparrow \mathbf{P}(A)$*;*
3. $\mathbf{P}$ *é contínua por cima. Isto é dados* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ *e* $A_n \downarrow A \in \mathcal{F}_0$ *então* $\mathbf{P}(A_n) \downarrow \mathbf{P}(A)$*;*
4. *Contínua por cima em* $\varnothing$*. Isto é dados* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ *e* $A_n \downarrow \varnothing$ *então* $\mathbf{P}(A_n) \downarrow 0$.

Demonstração. *Já provamos que* $1. \implies 2.$ *e é imediato que* $3. \implies 4.$

($4. \implies 3.$*) Suponha que* $\mathbf{P}$ *é contínua por cima em* $\varnothing$ *e que* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ *e* $A_n \downarrow A \in \mathcal{F}_0$.

$$\begin{aligned} A_n \downarrow A &\implies A_n - A \downarrow \varnothing \\ &\implies \mathbf{P}[A_n] - \mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[A_n - A] \downarrow 0, \text{ pelo item 4.} \\ &\implies \mathbf{P}[A_n] \downarrow \mathbf{P}[A] \end{aligned}$$

($2. \iff 3.$*) Para provar esse fato basta observar que* $A_n \uparrow A \iff A_n^{\mathsf{c}} \downarrow A^{\mathsf{c}}$ *e que* $\mathbf{P}[A] = 1 - \mathbf{P}[A^{\mathsf{c}}]$.

($2. \implies 1.$*) Basta provar a* σ*-aditividade. Suponha que* $A_1, A_2, \ldots$ *são*

conjuntos disjuntos em $\mathcal{F}_0$ *tais que* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_0$. *Então*

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = P\left[\lim_{n}\uparrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \lim_{n}\uparrow P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right]$$

Na última igualdade usamos o item 2. □

1.13 Teorema (Unicidade das Medidas de Probabilidade) *Dado $\mathcal{P}$ uma família de subconjuntos de Ω. Se $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ são duas medidas de probabilidade em $(\Omega, \sigma\langle\mathcal{P}\rangle)$ tais que*

1. *$\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ concordam em $\mathcal{P}$;*
2. *$\mathcal{P}$ é um π-sistema,*

então $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ concordam em $\sigma\langle\mathcal{P}\rangle$.

Demonstração. *Para demonstrar esse fato usaremos o Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin.*

Definiremos os bons conjuntos como:

$$\mathcal{G} := \{A \subset \Omega \colon \mathbf{Q}[A] = \mathbf{P}[A]\}.$$

O Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin afirma que $\sigma\langle\mathcal{P}\rangle = \lambda\langle\mathcal{P}\rangle$ quando $\mathcal{P}$ é um π-sistema. Logo para demonstrar que $\sigma\langle\mathcal{P}\rangle = \lambda\langle\mathcal{P}\rangle \subset \mathcal{G}$ basta demonstrar que $\mathcal{G}$ é um λ-sistema e utilizar o Princípio dos Bons Conjuntos.

□ $\Omega \in \mathcal{G}$.

Isto é imediato pois $\mathbf{Q}[\Omega] = 1$ e $\mathbf{P}[\Omega] = 1$;

- $A \in \mathcal{G} \Longrightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{G}$

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{G} &\Longrightarrow \mathbf{Q}[A] = \mathbf{P}[A] \\
&\Longrightarrow 1 - \mathbf{Q}[A^{\mathsf{c}}] = 1 - \mathbf{P}[A^{\mathsf{c}}] \\
&\Longrightarrow \mathbf{Q}[A^{\mathsf{c}}] = \mathbf{P}[A^{\mathsf{c}}] \\
&\Longrightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{G}.
\end{aligned}
$$

- *Dado uma família de conjuntos disjuntos* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in$

$\mathcal{G}$

$$\underbrace{A_1, A_2, \ldots}_{disjuntos} \in \mathcal{G} \Longrightarrow \mathbf{Q}[A_k] = \mathbf{P}[A_k], \forall k$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}[A_k]}_{=\mathbf{Q}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k]} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_k]}_{=\mathbf{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k]}$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}.$$

Observe que esta última afirmação não poderia ser provada se os conjuntos A_k não fossem disjuntos. Isso ilustra a necessidade do Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin. □

1.14 Definição (Medida nula e μ-negligenciável) *Dado* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *um espaço de medida. Então*

a *Um conjunto* $A \in \mathcal{F}$ *é dito de medida nula se* $\mu(A) = 0$.

b *Um conjunto* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *é dito* μ-***negligenciável*** *se existe um conjunto* μ- *nulo* $B \in \mathcal{F}$ *tal que* $A \subset B$.

1.15 Definição (Espaços Completos) *Um espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *é dito* ***completo*** *se todos os conjuntos* μ*-negligenciáveis pertencem à* $\mathcal{F}$.

Todo espaço de medida pode ser completado.

1.16 Teorema (O completamento $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$) *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{N}_\mu$ ser a família dos conjuntos μ-negligenciáveis.*

Então

a $\bar{\mathcal{F}} := \sigma\langle \mathcal{F}, \mathcal{N}_\mu \rangle = \{F \cup N : F \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}_\mu\}$;

b *A função $\bar{\mu}$ em $\bar{\mathcal{F}}$ definida por $\bar{\mu}(F \cup N) = \mu(F)$ para $F \in \mathcal{F}$ e $N \in \mathcal{N}_\mu$ é a única extensão de μ para uma medida em $(\Omega, \bar{\mathcal{F}})$;*

c *O espaço de medida $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ é completo.*

A tripla $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ é denominada ***completamento*** *de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

1.2 Teorema de Extensão de Carathéodory

O Teorema de Extensão de Carathéodory afirma que qualquer medida na álgebra $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos de um dado conjunto Ω pode ser estendida à σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_0$, e essa extensão é única se a medida for σ-finita. Consequentemente, qualquer medida em um espaço contendo todos os intervalos de números reais pode ser estendida para a álgebra Borel do conjunto de números reais. Este é um resultado extremamente poderoso da Teoria de Medida e através dele provaremos, por exemplo, a existência da medida de Lebesgue.

Vamos apresentar uma técnica para a construção de medidas. Faremos a descrição para medidas de probabilidade mas a construção funciona para medidas finitas. E com um pouco mais de cuidado para medidas σ-finitas.

Na sessão seguinte estudaremos como determinar, e de certa forma construir, medidas em espaços gerais. Nos preocuparemos em especial com medidas de probabilidade, mas os argumentos para medidas quaisquer são similares, com alguns pequenos ajustes para incluir com cuidado os conjuntos de medida infinita.

1.2.1 Medidas Exteriores

A ideia fundamental dessa seção é estender uma função de conjuntos $\mathbf{P}$, que foi apenas parcialmente definida, para uma medida exterior $\mathbf{P}^*$.

A extensão é notavelmente simples e intuitiva. Ele também "funciona"com praticamente qualquer função não negativa $\mathbf{P}$. Só mais tarde precisamos impor condições mais fortes em $\mathbf{P}$, como a aditividade.

1.17 Definição (Medida Exterior Induzida) *Considere $\mathcal{A}$ uma família qualquer de subconjuntos de um espaço Ω, e $\mathbf{P}\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ser uma função de conjunto não-negativa. Suponha $\varnothing \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.*

A ***medida exterior*** *induzida por* **P** *é a função:*

$$\mathbf{P}^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \mid A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ cobrem } E\right\},$$

definido para todos os conjuntos $E \subseteq \Omega$.

Primeiramente mostraremos que $\mathbf{P}^*$ satisfaz as seguintes propriedades básicas, que transformamos em uma definição por conveniência.

1.18 Definição (Medida Exterior) *Uma função* $\mathbf{Q}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *é uma* ***medida exterior*** *se:*

$\boxed{1}$ $\mathbf{Q}(\varnothing) = 0$.

$\boxed{2}$ *Monotonicidade* $\mathbf{Q}(E) \leq \mathbf{Q}(F)$ *quando* $E \subseteq F \subseteq \Omega$.

$\boxed{3}$ *Subaditividade enumerável Se* $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$*, então* $\mathbf{Q}(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \mathbf{Q}(E_n)$.

1.19 Teorema (Propriedades da Medida Exterior Induzida) *A medida exterior induzida* $\mathbf{P}^*$ *é uma medida exterior satisfazendo* $\mathbf{P}^*(A) \leq \mathbf{P}(A)$ *para todo* $A \in \mathcal{A}$.

Demonstração. *As propriedades 1. e 2. para uma medida exterior são obviamente satisfeitas por* $\mathbf{P}^*$. *E o fato que* $\mathbf{P}^*(A) \leq \mathbf{P}(A)$ *para* $A \in \mathcal{A}$ *também é óbvio, bastando observar que* A *é uma cobertura de* A.

A propriedade 3. é demonstrada por argumentos de aproximação. Seja $\varepsilon > 0$. *Para cada* E_n, *pela definição de* $\mathbf{P}^*$, *existem conjuntos* $\{A_{n,m}\}_m \subseteq \mathcal{A}$ *cobrindo* E_n, *com*

$$\sum_m \mathbf{P}(A_{n,m}) \leq \mathbf{P}^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Todos os conjuntos $A_{n,m}$ *juntos cobrem* $\bigcup_n E_n$, *então temos*

$$\mathbf{P}^*(\bigcup_n E_n) \leq \sum_{n,m} \mathbf{P}(A_{n,m}) = \sum_n \sum_m \mathbf{P}(A_{n,m}) \leq \sum_n \mathbf{P}^*(E_n) + \varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ *é arbitrário, temos* $\mathbf{P}^*(\bigcup_n E_n) \leq \sum_n \mathbf{P}^*(E_n)$. □

Nosso primeiro objetivo é procurar casos para os quais $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^*$ seja σ-aditiva, de modo que se torne uma medida. Suspeitamos que possamos ter que restringir o domínio de $\mathbf{Q}$, e ainda assim este domínio deve ser suficientemente grande e ainda ser uma σ-álgebra.

Felizmente, há uma caracterização abstrata do "melhor"domínio para $\mathbf{Q}$, devido a Constantin Carathéodory:

1.20 Definição (Conjuntos Mensuráveis para a Medida Exterior) *Seja* $\mathbf{Q}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ *uma medida exterior. Então*

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathbf{Q}(B \cap E) + \mathbf{Q}(B^{c} \cap E) = \mathbf{Q}(E) \quad \textit{para todo } E \subseteq \Omega\}$$

é a família de ***conjuntos mensuráveis para a medida exterior*** $\mathbf{Q}$.

Aplicando a subaditividade de $\mathbf{Q}$*, a seguinte definição é equivalente:*

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mathbf{Q}(B \cap E) + \mathbf{Q}(B^{c} \cap E) \leq \mathbf{Q}(E) \quad \textit{para todo } E \subseteq \Omega\}\ .$$

1.21 Heurística ([1]) *Suponha que* $\mathbf{Q}^{*}$ *seja uma medida externa finita em* Ω

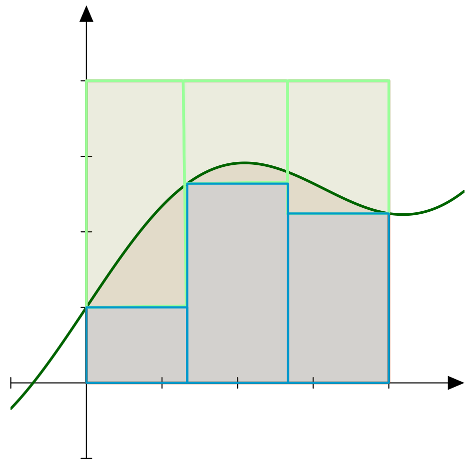
Podemos definir uma "medida interna" $\mathbf{Q}_{*}$ *em* Ω *por*

$$\mathbf{Q}_{*}(A) = \mathbf{Q}^{*}(\Omega) - \mathbf{Q}^{*}(A^{c})$$

Se a medida externa $\mathbf{Q}^{*}$*, for induzida a partir de uma medida* σ*-aditiva definida em alguma álgebra de conjuntos de* Ω*, então um subconjunto de* Ω *será mensurável no sentido de Carathéodory se e somente se sua medida externa e medida interna concordarem, veja o Exercício 1.2.*

A partir deste ponto de vista, a construção da medida (bem como da σ*-álgebra de conjuntos mensuráveis) é apenas uma generalização da construção* *natural da integral de Riemann em $\mathbb{R}$ - você tenta aproximar a área de um conjunto limitado E usando retângulos finitos e o conjunto é "mensurável no sentido de Riemann"se a melhor aproximação externa de sua área concorda com a melhor aproximação interna de sua área.*

O ponto fundamental aqui é que o conceito de área interna é redundante e poderia ser definido em termos da área externa, como feito acima. Se a função é limitada, considere um retângulo contendo o conjunto abaixo dessa função e defina a medida interna como a medida externa do complemento do conjunto em relação a este retângulo.



Claro, a construção de Carathéodory não exige que $\mathbf{Q}^*$ *seja finita, mas o argumento acima ainda nos fornece uma intuição decente para o caso geral*

O denominação "conjunto mensurável"é justificada pelo seguinte resultado sobre $\mathcal{M}$

1.22 Teorema *A família* $\mathcal{M}$ *é uma* σ*-álgebra.*

Demonstração. *É imediato a partir da definição que $\mathcal{M}$ é fechado em relação ao complementar, e que $\varnothing \in \mathcal{M}$. Primeiro demostramos que $\mathcal{M}$ é fechado sob interseções finitas e, portanto, sob união finita. Considere $A, B \in \mathcal{M}$ então:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Q}\big((A \cap B) \cap E\big) + \mathbf{Q}\big((A \cap B)^{c} \cap E\big) && (1.1)\\
&= \mathbf{Q}(A \cap B \cap E) + \mathbf{Q}\big((A^{c} \cap B \cap E) \cup (A \cap B^{c} \cap E) \cup (A^{c} \cap B^{c} \cap E)\big) && (1.2)\\
&\leq \mathbf{Q}(A \cap B \cap E) + \mathbf{Q}(A^{c} \cap B \cap E) + \mathbf{Q}(A \cap B^{c} \cap E) + \mathbf{Q}(A^{c} \cap B^{c} \cap E) && (1.3)\\
&= \mathbf{Q}(B \cap E) + \mathbf{Q}(B^{c} \cap E)\,, \quad \textit{pela definição de } A \in \mathcal{M} && (1.4)\\
&= \mathbf{Q}(E)\,, \quad \textit{pela definição de } B \in \mathcal{M}\,. && (1.5)
\end{aligned}
$$

Portanto, $A \cap B \in \mathcal{M}$.

Agora temos que demostrar que se $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$, então $\bigcup_n B_n \in \mathcal{M}$.

Podemos assumir que os conjuntos B_n são disjuntos, caso contrário, considere em vez $B'_n = B_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$.

Para conveniência de notação, seja:

$$D_N = \bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{M}\,, \quad D_N \uparrow D_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,.$$

Precisamos também do seguinte fato

$$\mathbf{Q}\Bigg(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap E\Bigg) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{Q}(B_n \cap E)\,, \quad \textit{para todo } E \subseteq \Omega \textit{ e } N = 1, 2, \ldots\,.$$

que pode ser demonstrado por indução direta. O caso inicial $N = 1$ é trivial.

Para $N > 1$,

$$\mathbf{Q}(D_N \cap E) = \mathbf{Q}\big(D_{N-1} \cap (D_N \cap E)\big) + \mathbf{Q}\big(D_{N-1}^{\complement} \cap (D_N \cap E)\big) \tag{1.6}$$

$$= \mathbf{Q}(D_{N-1} \cap E) + \mathbf{Q}(B_N \cap E) \tag{1.7}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbf{Q}(B_n \cap E)\,, \quad \textit{por hipótese de indução.} \tag{1.8}$$

Assim

$$\mathbf{Q}(E) = \mathbf{Q}(D_N \cap E) + \mathbf{Q}(D_N^{\complement} \cap E) \tag{1.9}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbf{Q}(B_n \cap E) + \mathbf{Q}(D_N^{\complement} \cap E) \tag{1.10}$$
$$\geq \sum_{n=1}^{N} \mathbf{Q}(B_n \cap E) + \mathbf{Q}(D_\infty^{\complement} \cap E)\,, \quad \textit{por monotonicidade.} \tag{1.11}$$

Tomando $N \longrightarrow \infty$, *obtemos*

$$\mathbf{Q}(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}(B_n \cap E) + \mathbf{Q}(D_\infty^{\complement} \cap E) \geq \mathbf{Q}(D_\infty \cap E) + \mathbf{Q}(D_\infty^{\complement} \cap E)\,.$$

Mas isso implica $D_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$. □

1.23 Teorema (Aditividade Enumerável da Medida Exterior) *Dado uma medida exterior* $\mathbf{Q}$*, então* $\mathbf{Q}$ *é* σ*-aditiva em* $\mathcal{M}$*. Isso é, se* $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$ *forem disjuntos, então* $\mathbf{Q}(\bigcup_n B_n) = \sum_n \mathbf{Q}(B_n)$*.*

Demonstração. *O caso finito* $\mathbf{Q}(\bigcup_{n=1}^N B_n) = \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}(B_n)$ *já foi provado, bastando substituir* $E = \Omega$ *na equação.*

Por monotonicidade, $\sum_{n=1}^N \mathbf{Q}(B_n) \leq \mathbf{Q}(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)$*. Fazendo* $N \to \infty$ *temos* $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{Q}(B_n) \leq \mathbf{Q}(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)$*.*

A desigualdade na outra direção está implícita na subaditividade. □

Resumimos o que obtivemos até agora

1.24 Corolário (Teorema de Carathéodory) *Se* $\mathbf{Q}$ *for uma medida exterior (1.18), então a restrição de* $\mathbf{Q}$ *para os conjuntos mensuráveis* $\mathcal{M}$ *(1.20) produz* *uma medida em $\mathcal{M}$.*

1.2.2 Definindo uma Medida por Extensão

1.25 Teorema (Teorema de Extensão de Carathéodory) *Dada uma pré-medida de probabilidade $\mathbf{P}_0$ na álgebra $\mathcal{F}_0$ então esta possui uma única extensão para a medida de probabilidade $\mathbf{P}$ em $\sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle =: \mathcal{F}$.*

Demonstração. *A unicidade segue diretamente do Teorema 1.13 pois $\mathcal{F}_0$ é um π-sistema.*

Para provar a existência da extensão considere $A \in \mathcal{F}_0$. Para qualquer $E \subseteq \Omega$ e $\varepsilon > 0$, por definição de $\mathbf{P}^*$ podemos encontrar $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ cobrindo E tal que $\sum_n \mathbf{P}(B_n) \leq \mathbf{P}^*(E) + \varepsilon$. Usando as propriedades das *medidas exteriores induzidas temos*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}^*(A \cap E) + \mathbf{P}^*(A^{\complement} \cap E) &\leq \mathbf{P}^*\Big(A \cap \bigcup_n B_n\Big) + \mathbf{P}^*\Big(A^{\complement} \cap \bigcup_n B_n\Big) && (1.12)\\
&\leq \sum_n \mathbf{P}^*(A \cap B_n) + \sum_n \mathbf{P}^*(A^{\complement} \cap B_n) && (1.13)\\
&\leq \sum_n \mathbf{P}(A \cap B_n) + \sum_n \mathbf{P}(A^{\complement} \cap B_n) && (1.14)\\
&= \sum_n \mathbf{P}(B_n)\,, \quad \textit{da aditividade finita de } \mathbf{P}, && (1.15)\\
&\leq \mathbf{P}^*(E) + \varepsilon\,. && (1.16)
\end{aligned}
$$

Tomando $\varepsilon \downarrow 0$, temos que A é mensurável para $\mathbf{P}^*$.

Agora mostraremos que $\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{P}(A)$. Considere qualquer cobertura de A

por $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$. *Pela subaditividade enumerável e monotonicidade de* $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_n A \cap B_n\Big) \leq \sum_n \mathbf{P}(A \cap B_n) \leq \sum_n \mathbf{P}(B_n)\,.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as coberturas temos que $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}^*(A)$. *A outra desigualdade* $\mathbf{P}(A) \geq \mathbf{P}^*(A)$ *é automática.* $\square$

1.3 Classes Compactas

Agora, damos condições suficientes para que uma medida finitamente aditiva finita seja uma pré-medida e consequentemente uma medida. As condições são baseadas em uma propriedade relacionada à propriedade topológica de compacidade.

1.26 Definição (Classe Compacta) *Dizemos que $\mathcal{K}$ é uma* ***classe compacta*** *se para toda sequência $C_n \subset \mathcal{K}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$ tivermos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C_1 \cap \cdots \cap C_m = \varnothing$.*

1.27 Exemplo *A família de conjuntos compactos num espaço métrico é uma classe compacta.*

Provaremos esse fato por contradição. Suponha que nenhuma intersecção finita seja vazia. Defina o conjunto $B_n = \bigcap\limits_{m=1}^{n} C_m$. Então cada B_n não é vazio e compacto. Escolha uma sequência $x_1, x_2, \ldots,$ tal que $x_k \in B_k$. Observe que esta sequência tem uma subsequência convergente porque está dentro do conjunto compacto C_1. Podemos mostrar que o limite dessa sequência está contido em cada C_n, porque a cauda da sequência está contida em C_n e C_n

é fechado. Isso é uma contradição porque provamos que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ *contém um ponto.*

O mesmo resultado é verdadeiro para um espaço topológico de Hausdorff. Para demonstrar isso considere uma sequência de conjuntos $C_n \subset \mathcal{K}$. *Se* $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$, *então*

$$C_0 = C_0 \setminus \emptyset = C_0 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_0 \setminus C_n)$$

Mas $C_0 \setminus C_n$ *é aberto para todo* C_n, *então pela compacidade de* C_0 *temos que existem um* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ *tais que*

$$C_0 = \bigcup_{i=1}^{m} (C_0 \setminus C_{\alpha_i}) = C_0 \setminus \bigcap_{i=1}^{m} C_{\alpha_i} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Exercício: Se $\mathcal{K}$ é uma classe compacta, então, a menor família, incluindo $\mathcal{K}$ e fechada sob uniões finitas e intersecções enumeráveis também uma classe compacta. □

1.28 Teorema (Teorema de Extensão Compacta) *Sejam μ uma medida finitamente aditiva definida numa álgebra $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos de Ω e $\mathcal{K}$ uma subclasse compacta de $\mathcal{F}_0$, e suponha que, para cada $A \in \mathcal{F}_0$, tenhamos*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K} \text{ e } C \subset A\}.$$

Então, μ é pré medida em $\mathcal{F}_0$.

Demonstração. *Suponha que os conjuntos $A_n \in \mathcal{F}_0$ são decrescentes e que sua intersecção seja vazia. Mostraremos que $\mu(A_n) \to 0$. Para isso considere*

$\varepsilon > 0$. *Para cada n escolha $C_n \in \mathcal{K}$ com $C_n \subset A_n$ e $\mu(A_n) \leq \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Temos então que*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus C_i\right) \tag{1.17}$$

Observe que $K_n = \bigcap_{i=1}^{n} C_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i \downarrow \emptyset$ logo $K_n \downarrow \emptyset$. Como os conjuntos formam uma classe compacta existe m tal que $K_m = \emptyset$.

Como os conjuntos A_n são encaixantes temos que para $n > m$ a Equação (1.17) *se reduz a*

$$A_n \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus C_i\right).$$

e assim

$$\mu(A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \setminus C_i) < \varepsilon$$

e logo $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

1.4 Aplicações

1.4.1 Teorema dos Números Normais de Borel

Nessa seção construiremos o primeiro modelo de espaço de probabilidade não trivial. Esse modelo fundamental representará a escolha de um número uniformemente no intervalo $(0,1]$, bem como representará o lançamento de uma moeda infinitas vezes. Ou seja, construiremos a medida de Lebesgue em (0,1].

A construção desse modelo é paradigmática. Os passos que utilizaremos nessa construção se repetem em diversas outras construções.

Vamos começar colocando em destaque quais são esses passos:

Construção de Probabilidades

a Começaremos construindo uma probabilidade finitamente aditiva. Essa construção em geral é simples e intuitiva.

b Provaremos a σ-aditividade. Em alguns casos pode ser mais fácil provar a condição equivalente de continuidade no vazio. Em outros provar a condição do Teorema da Extensão Compacta.

c Usaremos o Teorema de Extensão de Carathéodory para obter um espaço de probabilidade.

Começaremos construindo uma probabilidade finitamente aditiva nos intervalos. Essa função atribui a cada intervalo seu comprimento.

1.29 Definição (Álgebra de Borel) *Seja $\mathcal{B}_0((0,1])$ a álgebra de Borel, isto é a família formada por uniões finitas (possivelmente vazia) de intervalos da forma $(a,b] \subset (0,1]$.*

1.30 Definição *Seja* $\mathbf{P}$ *uma atribuição de probabilidade em* $\mathcal{B}_0((0,1])$ *tal que:*

1 $\mathbf{P}[(a,b]] = b - a$ *para todo* $0 \leq a \leq b \leq 1$

2 *e estenda para todos os conjuntos de* $\mathcal{B}_0((0,1])$ *usando a identidade* $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$ *se* A, B *são conjuntos disjuntos em* $\mathcal{B}_0((0,1])$.

1.31 Teorema *A função de probabilidade finita* $\mathbf{P}$ *está bem definida.*

Demonstração. *Exercício* □

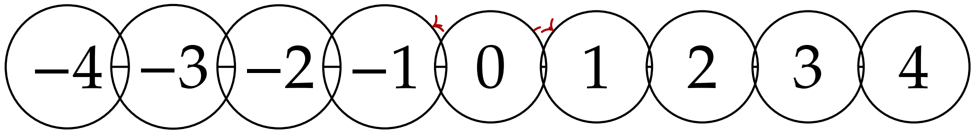
Podemos ver um número real $\omega \in (0,1]$ como a realização do lançamento de uma moeda infinitas vezes. Para isso considere a expressão binária desse número. Dessa forma $\omega \in (0,1]$ pode ser visto como uma sequência de dígitos em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Nessa representação estamos descartando o dígito 0 inicial de todas as sequência.

Nosso primeiro resultado será sobre a distribuição de dígitos 0 e 1 num número qualquer $\omega \in (0,1]$. Para realizar essa contagem faremos inicialmente uma conversão dos dígitos dessa sequência. Converteremos os $0 \to -1$ obtendo a sequência de funções de Rademacher z_k.

1.32 Definição *Para todo número $\omega \in (0,1]$, a função $d_k(\omega)$ denotará o k-ésimo digito da representação de ω. Seja $z_k(\omega) := 2d_k(\omega) - 1$ e*

$$s_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} z_k(\omega) \equiv \textit{ excesso de 1's nos n primeiros dígitos.}$$

1.33 Observação *A sequencia $s_n(\omega)$ definida acima pode ser vista como um passeio aleatório simétrico nos pontos de coordenadas inteiras da reta, isto é, em $\mathbb{Z}$, que começa em 0 e a cada passo move para a direita ou esquerda, +1 ou -1, com probabilidade igual. Este passeio pode ser ilustrado da seguinte* *maneira. Um ponto é colocado no zero e uma moeda justa é jogada. Se sair cara, o marcador é movido uma unidade para a direita e se sair coroa o marcador é movido uma unidade para a esquerda.*



◁

Provaremos que

$$\lim_{n\to\infty} P\Big[\Big\{\omega \in (0,1] : \Big|\text{excesso de 1's nos } n \text{ primeiros dígitos.}\Big| \geq \varepsilon\Big\}\Big] = 0.$$

Veja que na expressão acima o limite está fora da probabilidade e como veremos o evento que está dentro da probabilidade é um evento na álgebra de Borel. Assim expressão anterior faz sentido com o que desenvolvemos até esse instante.

1.34 Teorema (Lei Fraca dos Grandes Números - Teorema de Bernoulli)
Para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big[\big\{\omega \in (0,1] : |s_n(\omega)/n| \geq \varepsilon\big\}\Big] = 0.$$

Demonstração. *Qualquer evento baseado nos valores* $z_1(\omega), \ldots, z_n(\omega)$ *pode ser descrito como uma união disjunta de intervalos diádicos da forma* $\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. *Logo* $\big\{\omega \in (0,1] : |s_n(\omega)/n| \geq \varepsilon\big\} \in \mathcal{B}_0((0,1])$.

Cada intervalo diádico de nível $i-1$ *se divide em dois no nível* i. *Logo a função de Rademacher toma valor* $+1$ *em metade do intervalo e valor* -1 *na outra metade. De modo mais geral suponha que* $i < j$. *Em um intervalo diádico de grau* $j-1$, $z_i(w)$ *é constante e* $z_j(w)$ *tem valor* -1 *na metade* *esquerda e* $+1$ *na direita. O produto* $z_i(w)z_j(w)$, *portanto, integra 0 sobre cada um dos intervalos diádicos de nível* $j-1$ *e logo*

$$\int_0^1 z_k(\omega)z_j(\omega)\,d\omega = \begin{cases} 1 & \textit{quando } k = j \\ 0 & \textit{quando } k \neq j. \end{cases}$$

Isso implica que $\displaystyle\int_0^1 s_n^2(\omega)\,d\omega = \int_0^1 \sum_{k,j=1}^{n} z_k(\omega)z_j(\omega)\,d\omega = n$ *e logo*

$$\begin{aligned} n = \int_0^1 s_n^2(\omega)\,d\omega &\geq \int_{|s_n/n|\geq\varepsilon} s_n^2(\omega)\,d\omega \\ &\geq \int_{|s_n/n|\geq\varepsilon} n^2\varepsilon^2\,d\omega \geq n^2\varepsilon^2\mathbf{P}\big[|s_n/n| \geq \varepsilon\big] \end{aligned}$$

Logo $\mathbf{P}\big[|s_n/n| \geq \varepsilon\big] \leq 1/(n\varepsilon^2) \to 0$ *quando* $n \to \infty$. $\square$

Dado uma base, b um **número normal** é um número real cujos algarismos aparecem todos com a mesma frequência, ou seja, cuja sequência infinita de dígitos na base b é distribuída uniformemente no sentido de que cada um dos valores algarismos tem a mesma frequência ${}^1/_b$. Também significa que nenhum algarismo, ou combinação (finita) de algarismos, ocorre com mais frequência do que qualquer outra. No que se segue trataremos apenas de números normais na base 2, mas os argumentos podem ser adaptados facilmente para outras bases.

1.35 Definição *O conjunto dos **números normais**[1] em* $(0,1]$ *é definido como*

$$\begin{aligned} N &:= \{\omega \in (0,1] : \lim_{n\to\infty} s_n(\omega)/n = 0\} \\ &= \{\omega \in (0,1] : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k(\omega) = \frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

*O conjunto dos **números anormais** é definido como* $A := (0,1] - N$.

Provaremos que os números anormais formam um conjunto negligenciável.

1.36 Definição (Conjunto Negligenciável) *Um subconjunto* $B \subset (0,1]$ *é dito **negligenciável** se para todo* $\varepsilon > 0$*, existem subconjuntos* $B_1, B_2, \ldots$ *de*

[1] na base 2

$\mathcal{B}_0((0,1])$ *tal que*

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_k] \leq \varepsilon.$$

O próximo teorema também é conhecido como a Lei Forte dos Grandes Números para o Lançamento de Moedas

1.37 Teorema (Teorema dos Números Normais de Borel) *O conjunto dos números anormais, A, é negligenciável.*

Demonstração.

$\boxed{1}$ *Começaremos notando as seguintes inclusões:*

Dado $\varepsilon_k \downarrow 0$ quando $k \to \infty$. Então

$$
\begin{aligned}
\left\{\omega\colon \left|\frac{s_{k^2}(\omega)}{k^2}\right| < \varepsilon_k \ \textit{para } k \textit{ suficientemente grande} \right\} & \\
\subset \left\{\omega\colon \lim_k \frac{s_{k^2}(\omega)}{k^2} = 0\right\} & \\
\subset \underbrace{\left\{\omega\colon \lim_n \frac{s_n(\omega)}{n} = 0\right\}}_{=N} &
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ *Agora por (1.) temos que*

$$\begin{aligned} A = N^{\mathsf{c}} &\subset \{\omega : \left|\frac{s_{k^2}(\omega)}{k^2}\right| \geq \varepsilon_k \text{ para infinitos } k\} \\ &\subset \bigcup_{k=j}^{\infty} \underbrace{\{\omega : \left|\frac{s_{k^2}(\omega)}{k^2}\right| \geq \varepsilon_k\}}_{=:B_k}, \quad \text{para todo } j \end{aligned}$$

onde $B_k \in \mathcal{B}_0^{(0,1])}$. *Da demonstração da Lei Fraca*

$$\mathbf{P}[B_k] \leq \frac{1}{k^2 \varepsilon_k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

se tomarmos $\varepsilon_k := k^{-1/4}$. *Logo* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_k] < \infty$ *e assim* $\sum_{k=j}^{\infty} \mathbf{P}[B_k] \to 0$ *quando* $j \to \infty$. *Portanto* A *é negligenciável* □

Esse é o máximo que podemos ir só com probabilidade finitamente aditiva. Gostaríamos de poder "passar o limite para dentro" e dizer que os conjuntos anormais tem medida nula.

Para isso precisamos estender esse modelo para um modelo de probabilidade. Começaremos provando a continuidade.

1.38 Teorema *A aplicação* $\mathbf{P} : \mathcal{B}_0((0,1]) \to [0,1]$ *definida pela Definição 1.30 é uma pré-medida de probabilidade.*

Demonstração. *Usaremos o Teorema 1.25 e demonstraremos que* $\mathbf{P}$ *é contínua por cima em* $\varnothing$*. Dado* $A_n \downarrow \varnothing$ *onde* $A_n \in \mathcal{B}_0((0,1])$ *(em particular temos que* $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$*). Provaremos que* $\mathbf{P}[A_n] \downarrow 0$.

Observe que para todo $n \geq N$ temos

$$\mathbf{P}[A_n] \leq \mathbf{P}[A_N] = \mathbf{P}\Big[\bigcap_{k=1}^{N} A_k\Big]$$

como os conjuntos A_k são decrescentes. É suficiente demonstrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que

$$\mathbf{P}\Big[\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} A_k\Big] \leq \varepsilon.$$

O argumento seguinte não funciona, mas ele vai motivar a solução. Dado $\varepsilon > 0$ e para todo A_k construa uma sequência de fechados F_k tal que $F_k \subset A_k$ e $\mathbf{P}[A_k - F_k] \leq \varepsilon/2^k$

(Se A_k tem a forma $\bigcup_i (a_i, b_i]$ tome $F_k := \bigcup_i [a_i + \tau, b_i]$ para τ suficiente-

mente pequeno).

Como $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$ *temos que* $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \varnothing$. *Por compacidade existe* N_ε *tal que* $\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} F_k = \varnothing$. *Logo*

$$\underbrace{\mathbf{P}\Big[\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} A_k\Big] - \mathbf{P}\Big[\underbrace{\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} F_k}_{=\varnothing}\Big]}_{=0} \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \mathbf{P}\big[A_k - F_k\big] \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Isso estabeleceria 14 se não fosse pelo problema que $\mathbf{P}$ *não está necessariamente definida nos* F_k.

Agora é claro como remediar a situação. Para todo A_k *encontre conjuntos fechados* F_k *e subconjuntos* A_k^o *de* $\mathcal{B}_0((0,1])$ *tais que* $A_k \supset F_k \supset A_k^o$ *e*

$\mathbf{P}[A_k - A_k^o] \leq \varepsilon/2^k$. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *temos que existe* N_ε *tal que* $\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} F_k = \varnothing$ *o que implica* $\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} A_k^o = \varnothing$ *e assim*

$$\mathbf{P}[\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} A_k] - \underbrace{\mathbf{P}[\underbrace{\bigcap_{k=1}^{N_\varepsilon} A_k^o}_{=\varnothing}]}_{=0} \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \mathbf{P}\left[A_k - A_k^o\right] \leq \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon.$$

$\square$

1.39 Teorema (Medida de Lebesgue) *Dado* $\mathbf{P} : \mathcal{B}_0((0,1]) \to [0,1]$ *como na Definição* 1.30. *Então*

1. $\mathbf{P}$ *admite uma única extensão para uma medida de probabilidade em* $\mathcal{B}((0,1])$ *(também denotada* $\mathbf{P}$*);*

2 $\mathbf{P}$ *é a única medida em* $\mathcal{B}((0,1])$ *que satisfaz* $\mathbf{P}[(0,x]] = x$ *para todo* $x \in (0,1]$*;*

Demonstração.

□ *Demonstração do item 1.39.1*

O Teorema de Extensão de Carathéodory com o Teorema 1.38 mostra que existe uma única extensão $\mathbf{P} : \mathcal{B}_0((0,1]) \longrightarrow [0,1]$ *para* $\mathbf{P} : \mathcal{B}((0,1]) \longrightarrow [0,1]$ *como* $\mathcal{B}((0,1]) = \sigma\left\langle \mathcal{B}_0((0,1]) \right\rangle$.

□ *Demonstração do item 1.39.2*

Esse item segue do Teorema de Unicidade de medida pois $\mathcal{B}((0,1]) = \sigma\langle (0,x] \colon x \in (0,1] \rangle$ *e* $\{(0,x] \colon x \in (0,1]\}$ *é uma* π*-sistema.*

Como corolário da construção da medida de Lebesgue temos que o conjunto dos números normais tem probabilidade 1 e surpreendentemente temos que a σ- álgebra de Borel não é o conjunto das partes! Isso ocorre pois existe uma medida de probabilidade não trivial e invariante na σ- álgebra de Borel o que sabemos pela construção do conjunto de Vitali não ocorre no conjunto das partes.

1.40 Corolário *Dado* $\mathbf{P} : \mathcal{B}_0((0,1]) \longrightarrow [0,1]$ *como na Definição 1.30. Então*

$\boxed{1}$ $N \in \mathcal{B}((0,1])$ *e* $\mathbf{P}[N] = 1$ *onde* N *é o conjunto dos números normais em* $(0,1]$*;*

$\boxed{2}$ $\mathcal{B}_0((0,1]) \subsetneq \mathcal{B}((0,1]) \subsetneq \overline{\mathcal{B}((0,1])} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$. *Conjuntos em* $\mathcal{B}((0,1])$ *são denominados* ***Borel mensuráveis****. Conjunto em* $\overline{\mathcal{B}((0,1])}$ *são denominados* ***Lebesgue mensuráveis****.*

Demonstração.

□ *Demonstração do item 1.40.1*

Observamos inicialmente que N *e* N^{c} *estão ambas em* $\mathcal{B}((0,1])$. *Agora pelo Teorema 1.37 temos que* N^{c} *é negligenciável. Ou seja dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $B_n \in \mathcal{B}_0((0,1])$ *tal que* $N^{\mathsf{c}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ *onde* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_n] \leq \varepsilon$. *Como* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}((0,1])$ *temos*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_n] \leq \varepsilon.$$

Logo

$$\mathbf{P}(N^{\mathsf{c}}) = \inf\{\mathbf{P}(B) \colon N^{\mathsf{c}} \subset B \in \mathcal{F}\} \leq \varepsilon$$

para todo ε. *Logo* $\mathbf{P}(N^{\mathsf{c}}) = 0$ *e* $\mathbf{P}(N) = 1$.

□

Nós já mencionamos que $N \in \mathcal{B}((0,1))$ *mas* $N \notin \mathcal{B}_0((0,1))$

A Proposição 1.50 mostra que $\mathcal{B}((0,1)) \subsetneq \overline{\mathcal{B}((0,1)}$.

O conjunto de Vitali mostra que é impossível estender P para uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}(\Omega)$ *que estabelece que* $\overline{\mathcal{B}((0,1)} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$.

Qual a diferença entre a lei fraca e a lei forte de grandes números?

$$\begin{aligned} \textbf{Lei Fraca}: &\quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{s_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1, \text{ para todo } \varepsilon > 0; \\ \textbf{Lei Forte}: &\quad \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0\right) = 1. \end{aligned}$$

A lei fraca fixa o n e analisa o conjunto dos $s_n(\omega)/n$ sobre $\omega \in (0,1]$. Em particular, a lei fraca diz que para grandes valores de n tornase cada vez mais raro encontrar ω 's que satisfazem $|s_n(\omega)/n| \geq \varepsilon$. Por outro lado, a lei forte fixa cada $\omega \in (0,1]$ e analisa os conjuntos dos $s_n(\omega)/n$ sobre n. Em particular para quase todo ω, $s_n(\omega)/n \to 0$ quando $n \to \infty$.

1.4.2 Moedas II - Medida de Probabilidade em $\{0,1\}^\infty$

Agora apresentaremos uma construção alternativa para o modelo de lançamento de infinitas moedas honestas.

Considere uma sequência infinita de lançamentos de moedas honestas. Desejamos construir um modelo probabilístico deste experimento de modo que cada sequência de resultados possível dos primeiros lançamentos tem a mesma probabilidade, $\frac{1}{2}^n$.

O espaço amostral para esta experiência é o conjunto $\{0,1\}^\infty$ de todas as sequências infinitas de zeros e uns.

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \quad \omega_i \in \{0,1\}$$

Como já discutimos, de modo geral pode não ser possível atribuir uma probabilidade a todo subconjunto do espaço amostral. Assim nossa abordagem será um pouco mais cuidadosa. Começaremos criando uma álgebra de subconjuntos, atribuiremos probabilidades finitas aos conjuntos que pertencem a esta álgebra e, em seguida, estenderemos para uma medida de probabilidade na σ álgebra gerada por essa álgebra.

Álgebra e σ-álgebra de $\{0,1\}^n$

Considere $\mathcal{F}_n$ a coleção de eventos cuja ocorrência pode ser decidida olhando apenas para os resultados dos primeiros lançamentos. Por exemplo, o evento $\{\omega|\omega_1 = 1 \text{ e } \omega_2 = \omega_6\}$ pertence a $\mathcal{F}_6$ (e deste modo pertence a $\mathcal{F}_k$ para todo $k \geq 6$).

Seja B um subconjunto arbitrário de $\{0,1\}^n$. Considere o conjunto

$$A = \{\omega \in \{0,1\}^\infty|(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B\}.$$

Podemos expressar $A \subset \{0,1\}^\infty$ na forma

$$A = B \times \{0,1\}^\infty.$$

(Isto é toda sequência em A pode ser vista como um par que consiste numa sequência de tamanho n que pertence a B, seguida de uma sequência infinita arbitrária. Nesse caso B é dito base do cilindro A.)

O evento A pertence a $\mathcal{F}_n$, e é fácil verificar que todos os elementos de $\mathcal{F}_n$ são desta forma.

Também é fácil verificar que $\mathcal{F}_n$ é uma σ-álgebra.

Exercício: Prove que $\mathcal{F}_n$ é uma σ-álgebra. □

As σ-álgebras $\mathcal{F}_n$, para qualquer n fixo, são muito pequenas. Elas só modelam os primeiros n lançamentos de moedas. Estamos interessados, em vez disso, em conjuntos que pertencem a $\mathcal{F}_n$, para n arbitrário, e isso nos leva a definir

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n,$$

a coleção de conjuntos que pertencem ao $\mathcal{F}_n$ para algum n. Intuitivamente, $A \in \mathcal{F}_0$ se a ocorrência ou não ocorrência de A pode ser decidido após um número fixo de jogadas de moedas.

1.41 Exemplo *Seja $A_n = \{\omega | \omega_n = 1\}$, o evento que o n-ésimo lance resulta em 1. Observamos que $A_n \in \mathcal{F}_n$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, que é o evento que existe pelo menos um 1 na sequência de lançamentos infinitos. O evento A não pertence a $\mathcal{F}_n$, para qualquer n. (Intuitivamente, tendo observado uma sequência de n zeros isso não nos permite decidir se haverá um 1 subsequente ou não.)* ◁

O exemplo anterior mostra que $\mathcal{F}_0$ não é uma σ-álgebra. Por outro lado, podemos mostrar que $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra.

Exercício: Prove que $\mathcal{F}_0$ é um álgebra. $\square$

Gostaríamos de ter um modelo de probabilidade que atribua probabilidades a todos os eventos em $\mathcal{F}_n$, para cada n. Isso significa que precisamos de uma σ-álgebra que inclua $\mathcal{F}_0$. Por outro lado, gostaríamos que nossa σ-álgebra fosse tão pequena quanto possível, ou seja, contenha como poucos subconjuntos de $\{0, 1\}^n$ quanto possível, para minimizar a possibilidade de incluir conjuntos patológicos aos quais as probabilidades não podem ser atribuídas . Isso nos leva a considerarmos F como a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_0$.

1.4.2.1 Definindo a medida de Probabilidade

Começamos definindo uma função finitamente aditiva $\mathbf{P}_0$ na álgebra $\mathcal{F}_0$ que satisfaz $\mathbf{P}_0(\{0,1\}^\infty) = 1$. Isso será realizado da seguinte forma. Todo conjunto A em $\mathcal{F}_0$ é da forma $B \times \{0,1\}^\infty$, para algum $B \subset \{0,1\}^n$. Então, definimos $\mathbf{P}_0(A) = \dfrac{|B|}{2^n}$.

Observe que desta forma ao evento que nos primeiros n lançamentos ocorre uma sequência particular $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, é atribuída a probabilidade $1/2^n$. Em particular, todas as sequências possíveis de comprimento fixo são atribuídas a mesma probabilidade, conforme desejado.

Antes de prosseguir, precisamos verificar se a definição acima é consistente. Observe que o mesmo conjunto A pode pertencer a $\mathcal{F}_n$ para vários valores de n. Portanto, precisamos verificar se, quando aplicamos a definição de $\mathbf{P}_0(A)$ para diferentes opções de n, obtemos o mesmo valor. Na verdade, suponha que $A \in \mathcal{F}_m$, que implica que $A \in \mathcal{F}_n$, para $n > m$. Neste caso,

$$A = B \times \{0,1\}^\infty = C \times \{0,1\}^\infty,$$

onde $B \subset \{0,1\}^n$ e $C \subset \{0,1\}^m$. Assim, $B = C \times \{0,1\}^{n-m}$ e $|B| = |C| \cdot 2^{n-m}$. Uma aplicação da definição produz $\mathbf{P}_0(A) = |B|/2^n$, e outra produz $\mathbf{P}_0(A) = |C|/2^m$. Como $|B| = |C| \cdot 2^{n-m}$, ambos produzem o mesmo valor.

É fácil verificar que $\mathbf{P}_0(\Omega) = 1$, e que $\mathbf{P}_0$ é finitamente aditiva. Também podemos provar que $(\mathcal{F}_0, \mathbf{P}_0)$ satisfaz

$$\mathbf{P}_0(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{F}_0 \text{ e } C \subset A\}.$$

pois todo conjunto em $\mathcal{F}_0$ possui base finita e logo compacto na topologia produto.

Logo podemos invocar o Teorema de Extensão Compacta e concluir que existe uma única medida de probabilidade em $\mathcal{F}$, a σ-álgebra gerado por $\mathcal{F}_0$, que concorda com $\mathbf{P}_0$ em $\mathcal{F}_0$. Esta medida de probabilidade atribui a mesma probabilidade, $1/2^n$, a cada sequência possível de comprimento n, conforme desejado.

Os dois modelos de lançamentos de moedas que construímos são equivalentes.

1.4.3 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$

Para todo $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ seja $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1]$ o cubo unitário em $\mathbb{R}^d$ transladado por $\boldsymbol{i}$ ou seja

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1] \equiv (i_1, i_1+1] \times \cdots \times (i_d, i_d+1].$$

Esses conjuntos particionam o espaço,

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1],$$

e assim $\mathbb{R}^d$ pode ser decomposto como união enumerável de cubos unitários disjuntos. Seja $\mathcal{B}_0^{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]}$ a álgebra da união de finitos retângulos disjuntos em $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1]$ e seja $\mathcal{B}((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1]) \equiv \sigma\langle \mathcal{B}_0^{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]} \rangle$ a σ-álgebra de

Borel de $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]$. Finalmente denote por $\mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}$ a única medida de probabilidade uniforme em $\mathcal{B}((\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1])$ que atribui o volume Euclidiano aos retângulos em $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]$, i.e.

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\big((a_1,b_1]\times\cdots\times(a_d,b_d]\big)=\prod_{k=1}^{d}(b_k-a_k)$$

sempre que $(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_d,b_d]\subset(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]$.

A construção de $\mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}$ é feita exatamente da mesma forma que a medida de probabilidade uniforme foi construída em (0,1].

- □ Dado $A\in B_0^{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]}$ definimos $\mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}(A)$ como sendo a soma dos volumes disjuntos retângulo que compõem A (este passo não é totalmente trivial uma vez que existem diferentes de composições de A em retângulos disjuntos, mas pode-se provar que P_{bsi} é está bem definido).

- Depois, mostra-se que $\mathbf{P}_i$ é uma medida de probabilidade em $((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1],\mathcal{B}_0^{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]})$.A parte mais difícil deste passo é demonstrar a σ aditividade. No (0,1] nos usamos o fato equivalente que $\mathbf{P}_i$ é contínua por cima no $\emptyset$. O argumento também funciona em $((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1],\mathcal{B}_0^{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]}, \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}})$.
- Finalmente utilizamos o Teorema de extensão de Carathéodory temos $((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1],\mathcal{B}((\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]), \mathbf{P}_i)$ (a unicidade segue do fato que os retângulos formam um π-sistema).
- A partir da medida de probabilidades $((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1],\mathcal{B}((\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]), \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}})$ podemos definir a medida de Lebesgue $\mu_{\mathcal{L}}^d$ nos conjuntos $A \in$

$\mathcal{B}((\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1])$ como:

$$\mu^d_{\mathcal{L}}(A) := \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\big((\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]\cap A\big).$$

Agora provaremos que $\mu^d_{\mathcal{L}}$ é uma medida em $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

1.42 Teorema (Medida de Lebesgue) *$\mu^d_{\mathcal{L}}$ é uma medida em $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.*

Demonstração. *Demonstraremos que$\mu^d_{\mathcal{L}}$ satisfaz os três axiomas (i), (ii) e (iii):*

- ***(i)*** $\mu^d_{\mathcal{L}}(A) \in [0,\infty]$: *Trivial.*
- ***(ii)*** $\mu^d_{\mathcal{L}}(\varnothing) = 0$: *Imediato pois* $\mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\big((\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+1]\cap\varnothing\big) = 0$.
- ***(iii)*** *σ-aditividade: Suponha $A_1,A_2,\ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ são disjuntos. Então*

$$
\begin{aligned}
\mu_{\mathcal{L}}^{d}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) &= \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\Big((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1] \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \\
&= \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1] \cap A_k\Big) \\
&= \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\Big((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1] \cap A_k\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}\Big((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1] \cap A_k\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{L}}^{d}\big(A_k\big)
\end{aligned}
$$

1.43 Teorema *$\mu_{\mathcal{L}}^d$ é a única medida em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}((0,1]^d))$ que atribui o volume euclidiano padrão para os retângulos finitos, isto é:*

$$\mu_{\mathcal{L}}^d\big((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]\big) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$$

para $-\infty < a_k < b_k < \infty$.

Demonstração. *Defina $\mathcal{P}$ como o π-sistema composto de retângulos finitos de $\{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] : -\infty < a_k < b_k < \infty\}$ e o conjunto vazio $\varnothing$. Então $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\langle\mathcal{P}\rangle$. Também observamos que $\mu_{\mathcal{L}}^d$ é σ-finita em $\mathcal{P}$ pois $\mu_{\mathcal{L}}^d((\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1]) = 1$, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1]$ e cada $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+1] \in \mathcal{P}$. Logo o resultado decorre do Teorema 1.13.* □

1.44 Teorema *Para todo* $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}^d}$ *e* $x \in \mathbb{R}^d$, *o conjunto* $A + x := \{a + x : a \in A\}$ *está em* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *e*

$$\mu_{\mathcal{L}}^{d}(A + x) = \mu_{\mathcal{L}}^{d}(A)$$

Demonstração. *Para demonstrar que* $A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *usaremos o Princípio dos Bons Conjuntos. Dado* $x \in \mathbb{R}^d$ *e o conjunto* $\mathcal{G}_x := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : A + x \in$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. *É fácil ver que* $\mathcal{G}_x$ *é uma* σ*-álgebra. Por exemplo,*

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{G}_x &\Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ e } A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ &\Rightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ e } (A+x)^{\mathsf{c}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ &\Rightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ e } A^{\mathsf{c}} + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ &\Rightarrow A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{G}_x. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração do teorema 1.44 usaremos a mesma ideia de 1.4327 sobre a unicidade de $\mu^d_{\mathcal{L}}$.

Para isso dado x defina $\mu_x(A) := \mu^d_{\mathcal{L}}(A + x)$. *Então* μ_x *é uma medida em* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. *As medidas* μ_x *e* $\mu^d_{\mathcal{L}}$ *concordam no* π*-sistema dos retângulos finitos em* $\mathbb{R}^d$. *Logo pelo Teorema 1.43,* $\mu^d_{\mathcal{L}}(A) = \mu_x(A) := \mu^d_{\mathcal{L}}(A + x)$ *para todo* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

1.45 Teorema *Se $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é linear e não singular, então $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ implica que $TA := \{T(a) : a \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\mu^d_{\mathcal{L}}(TA) := |\det T|\mu^d_{\mathcal{L}}(A).$$

Demonstração. *Exercício*

1.46 Teorema *Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uma medida σ-finita. Então $\mathcal{F}$ não pode conter uma família de conjuntos disjuntos não enumeráveis de μ-medida positiva*

Demonstração. *Dado $\{B_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de conjuntos disjuntos tais que $\mu(B_i) > 0$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Mostraremos que $\mathcal{I}$ deve ser enumerável.*

Como μ é σ-finita existe $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A_k) < \infty$ e $\Omega = \bigcup_k A_k$. Mostraremos os seguintes fatos:

□ $\{i \in \mathcal{I} : \mu(A_k \cap B_i) > \varepsilon\}$ *é finita para todo* k : *Dado* $\varepsilon > 0$ *e suponha por contradição que existisse uma família enumerável de conjuntos* $\mathcal{I}_c \subset \mathcal{I}$ *tal que* $\mu(A_k \cap B_i) > \varepsilon$ *para todo* $i \in \mathcal{I}_c$ *e que*

$$\mu(A_k) \geq \mu(A_k \cap (\bigcup_{i \in \mathcal{I}_c} B_i)) = \sum_{i \in \mathcal{I}_c} \mu(A_k \cap B_i) > \sum_{i \in \mathcal{I}_c} \varepsilon = \infty$$

o que leva a uma contradição

□ $\{i \in \mathcal{I} : \mu(A_k \cap B_i) > 0\}$ *é enumerável para todo* k : *Esse fato segue de que*

$$\{i \in \mathcal{I} : \mu(A_k \cap B_i) > 0\} = \bigcup_{\varepsilon \text{ racional}} \underbrace{\{i \in \mathcal{I} : \mu(A \cap B_i) > \varepsilon\}.}_{\text{finito por (i)}}$$

□ $\mathcal{I} = \bigcup_k \{i \in \mathcal{I} : \mu(A_k \cap B_i) > 0\}$: *Para demonstrar que* $\mathcal{I} \cup \bigcup_k \{i \in \mathcal{I} : \mu(A_k \cap B_i) > 0\}$ *observe que* $i \in \mathcal{I}$ *então* $\mu(B_i) > 0$. *Como* $\Omega = \bigcup_k A_k$ *existe*

k tal que $\mu(A_k \cap B_i) > 0$. Logo $i \in \bigcup_k \{i \in \mathcal{I} : \mu(A_k \cap B_i) > 0\}$. A outra inclusão é óbvia.

Para terminar a prova, basta notar que os últimos itens implicam $\mathcal{I}$ é enumerável. □

Se $k < d$ então $\mu_{\mathcal{L}}^d(A) = 0$ para todo hiperplano k-dimensional $A \subset \mathbb{R}^d$ com $k < d$.

Demonstração. *Dado A um hiperplano k-dimensional com $k < d$. Dado x um ponto em $\mathbb{R}^d$ que não está contido em A. então $\{A + xt : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família não enumerável de subconjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Como $\mu_{\mathcal{L}}^d$ é invariante por translação $\mu_{\mathcal{L}}^d(A) = \mu_{\mathcal{L}}^d(A + xt)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 1.46, $\mu_{\mathcal{L}}^d(A) = 0$.* □

1.47 Definição (Conjuntos mensuráveis de Borel versus Lebesque) *Dado* $(\Omega, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}, \overline{\mu^d_{\mathcal{L}}})$ *o completamento de* $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu^d_{\mathcal{L}})$. *Se* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *então* A *é dito Borel mensurável. Se* $A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ *então* A *é dito Lebesque mensurável.*

1.5 ↯Como são, como vivem e e quantos são os Borelianos?

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre a cardinalidade dos Borelianos e dos conjuntos mensuráveis. Esses resultados não serão utilizados no restante do texto.

Começaremos com uma proposição, cuja demonstração é simples e deixaremos como exercício.

1.48 Proposição

- *Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos abertos e logo é um boreliano*
- *Todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ é um Boreliano*

Conjunto de Cantor Para construir o conjunto Cantor, começamos com o intervalo unitário: $C_0 = [0,1]$. Em seguida, removemos o terço médio desse intervalo, deixando uma união de dois intervalos fechados:

$$C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$$

Em seguida, removemos o terço médio de cada um desses intervalos, deixando uma união de quatro intervalos fechados:

$$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

Procedendo desta maneira, obtemos uma sequência encaixante $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ de conjuntos fechados, onde C_n é a união de 2^n intervalos fechados, como ilustrado na Figura 1.5. Então a interseção

$$C = \bigcap_n C_n$$

é o conjunto de Cantor.

1.49 Proposição *O conjunto de Cantor C tem as seguintes propriedades:*

1. *C é fechado, e logo é um Boreliano.*
2. *C é não enumerável. De fato,* $|C| = |\mathbb{R}|$.
3. $\mu(C) = 0$.

1.50 Proposição (Cardinalidade dos Conjuntos Lebesgue mensuráveis)

Seja $\mathcal{L}$ *a coleção de todos os subconjuntos Lebesgue mensuráveis de* $\mathbb{R}$. *Então*

$$|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|.$$

Demonstração. *Claramente* $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. *Mas como o conjunto de Cantor* C *tem medida de Lebesgue nula, temos que todo subconjunto do conjunto de Cantor é Lebesgue mensurável, ou seja,* $\mathcal{P}(C) \subset L$. *Mas como* $|C| = |\mathbb{R}|$, *segue que* $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *e, portanto,* $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \leq |\mathcal{L}|$. $\square$

1.51 Definição (Hierarquia Finita de Borel) *A hierarquia finita do Borel consiste em duas sequências Σ_n e Π_n de subconjuntos de $\mathcal{B}$ definidos da seguinte forma:*

- *Σ_1 é a coleção de todos os conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ e Π_1 é a coleção de todos os conjuntos fechados em $\mathbb{R}$.*
- *Para cada $n \geq 1$, a coleção Σ_{n+1} consiste de todas as uniões enumeráveis de conjuntos de Π_n, e a coleção Π_{n+1} consiste de todas as interseções enumeráveis de conjuntos de Σ_n.*

1.52 Exemplo *Assim, cada conjunto em Σ_3 pode ser escrito como*

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{m,n}$$

para conjuntos abertos $U_{m,n}$ e cada conjunto em Π_3 pode ser escrito como

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{m,n}$$

para conjuntos fechados $F_{m,n}$. $\triangleleft$

Assim nós temos $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2, \Sigma_1 \subseteq \Pi_2, \Pi_1 \subseteq \Sigma_2$ e $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$. E além disso, todas as quatro inclusões são próprias.

1.53 Teorema (Propriedades de Σ_n e Π_n) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, as seguintes afirmações são válidas.*

1 *Para todo $S \subseteq \mathbb{R}$, temos $S \in \Sigma_n$ se e somente se $S^c \in \Pi_n$.*

2 $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}, \Sigma_n \subseteq \Pi_{n+1}, \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1}$, *e* $\Pi_n \subseteq \Pi_{n+1}$.

Além disso, todas as inclusões são próprias.

Se $B \subseteq \mathbb{R}$ for um conjunto Borel, a **classificação de Borel** de B é o mínimo n tal que B se encontra em $\Sigma_n \subset \Pi_n$. Assim, conjuntos que são abertos ou fechados têm classificação de Borel 1.

Surpreendentemente, não é verdade que todo conjunto de Borel tenha classificação finita. Por exemplo, se $\{S_n\}$ for uma sequência de conjuntos do Borel, tal que cada S_n e tenha classificação n, então a união

$$S = S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$$

não pode ter classificação finita. Tal conjunto S é dito de classificação ω, e a coleção de todos esses conjuntos é conhecida como Σ_ω. O complemento de qualquer conjunto em Σ_ω também é dita de classificação ω, e a coleção de todos esses conjuntos é conhecida como Π_ω.

A hierarquia do Borel continua até além de ω. Por exemplo, $\Sigma_{\omega+1}$ consiste em todas as uniões enumeráveis de conjuntos de Π_ω e $\Pi_{\omega+1}$ consiste em todas as intersecções enumeráveis de conjuntos Σ_ω De fato, nós temos uma sequência de conjuntos

$$\subset \Sigma_2 \subset \Sigma_3 \subset \cdots \subset \Sigma_\omega \subset \Sigma_{\omega+1} \subset \Sigma_{2\omega} \subset \cdots \subset \Sigma_{2\omega} \subset \Sigma_{2\omega+1} \subset \cdots$$

e da mesma forma para o Π's. O resultado é que os conjuntos Σ_α e Π_α podem ser definidos para cada ordinal contável α (ou seja, para cada elemento de um conjunto bem ordenado e não enumerável e minimal, S_Ω). As famílias resultantes $\Sigma_\alpha : \alpha \in S_\Omega$ e $\Pi_\alpha : \alpha \in S_\Omega$ constituem a hierarquia de Borel completa, e a álgebra de Borel $\mathcal{B}$ é a união destas:

$$\mathcal{B} = \bigcup \Sigma_\alpha = \bigcup \Pi_\alpha.$$

Não é muito difícil provar que cada um dos conjuntos Σ_α e Π_α tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Como $|S_\Omega| \leq |\mathbb{R}|$, logo temos que a álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tem cardinalidade de $|\mathbb{R}|$ também.

1.54 Teorema (Cardinalidade da Álgebra de Borel) *Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Então $|\mathcal{B}| = |\mathbb{R}|$.*

1.55 Proposição *A cardinalidade da coleção de conjuntos mensuráveis é igual a $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$,*

Como essa cardinalidade é maior que a cardinalidade da álgebra de Borel. Isso produz o seguinte corolário.

1.56 Corolário *Existe um conjunto mensurável de Lebesgue que não é um conjunto de Borel.*

1.6 Medidas em Espaços Métricos

Escrever: espaços poloneses, regularidade e tightness.

Exercícios

Ex. 1.1 — Dados $A_1, A_2, \ldots$. Mostre que $\mathbf{P}(A_n \ \ i.v._n) = 1$ se e somente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n|A)$ diverge para todo A de probabilidade não nula.

Ex. 1.2 — Suponha que temos uma pré-medida μ em um espaço X tal que $\mu(X) < \infty$. Prove que $E \subset X$ é mensurável Carathéodory se e somente se $\mu^*(E) + \mu^*(E^C) = \mu(X)$.

Ex. 1.3 — [Integral de Lebesgue-Stieltjes] Dado $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}) :=$

$f\langle(-\infty,a] : -\infty < a < \infty\rangle$ a álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Seja P uma probabilidade finitamente aditiva em $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Mostre que P é uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ se e somente se a função definida por $F(x) := P((-\infty, x])$ é não decrescente, continua a direita e satisfaz $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Ex. 1.4 — (sub-additividade enumerável) Mostre que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Ex. 1.5 — Prove que a continuidade da medida de probabilidade. Dados $A_1, A_2, \ldots$ eventos, então

1. Se $A_n \uparrow A$, então $\mathbf{P}(A_n) \uparrow \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.
2. Se $A_n \downarrow A$, então $\mathbf{P}(A_n) \downarrow \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.
3. $\mathbf{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbf{P}(A_n) \leq \limsup \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup A_n)$.
4. $A_n \to A$ implica que $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$ as $n \to \infty$.

Ex. 1.6 — Considere um modelo probabilístico cujo espaço amostral é a reta real. Mostre que

1. $\mathbf{P}([0,\infty)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([0,n])$
2. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([n,\infty)) = 0$.

Ex. 1.7 — (Uma condição insuficiente) Dados $\Omega = \{1,2,3,4\}$, e $A = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$.

1. Mostre que a σ-algebra $\mathcal{F}$ gerada por A é o conjunto das partes $2^(\Omega)$.

2. Mostre que existem duas medidas de probabilidade P_1 e P_2 em $(\Omega, \mathcal{F})$, tal que $P_1(E) = P_2(E)$ para qualquer $E \in A$, mas $P_1 \neq P_2$. Este problema mostra que o fato de que duas medidas de probabilidade coincidem com uma família geradora de uma σ-álgebra não garante que elas sejam iguais. No entanto, isso é verdade se adicionarmos a suposição de que a família geradora A é fechada sob interseções finitas.

Ex. 1.8 — Desigualdade de Bonferroni

Definindo

$$S_1 := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

e

$$S_2 := \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

bem como

$$S_k := \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

para todos os números inteiros de k em $\{3, \ldots, n\}$.

Então, para k ímpar

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j$$

e para $k > 2$ par

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j.$$

(Se tiver com muita preguiça prove apenas para $k = 2,3$.)

Ex. 1.9 — Problema do Pareamento

No final de um dia agitado, os pais chegam ao jardim de infância para pegar seus filhos. Cada pai escolhe uma criança para levar a casa uniformemente ao acaso. Use o fórmula de inclusão-exclusão para mostrar que a probabilidade de pelo menos um pai escolhe seu próprio filho é igual a

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

E que essa probabilidade converge a $1 - 1/e$ quando $n \to \infty$

Ex. 1.10 — Qual é a probabilidade de que um ponto escolhido aleatoriamente no interior de um triângulo equilátero esteja mais perto do centro do que de suas bordas?

Ex. 1.11 — Agulhas de Buffon

Considere um plano horizontal dividido em faixas por uma série de linhas paralelas a distância fixa d, como as tábuas do chão.

E considere uma agulha, cujo comprimento seja igual à distância entre as linhas paralelas, que é jogada no plano aleatoriamente.

1. Defina precisamente o espaço de Probabilidade.
2. Prove que a probabilidade da agulha não interceptar uma das linhas paralelas é $\frac{2}{\pi}$.

Ex. 1.12 — O conjunto de números normais e anormais está em $\mathcal{B}((0,1])$.

Ex. 1.13 — Todos os subconjuntos contáveis, co-contáveis (i.e. complementos de conjuntos contáveis) e perfeitos de $(0,1]$ estão em $\mathcal{B}((0,1])$. Em particular, o conjunto dos números irracionais em $(0,1]$ é um conjunto de Borel.

Ex. 1.14 — Para todo número $\omega \in (0,1]$, denotamos por $d_k(\omega)$ o k-ésimo digito da representação de ω. Seja $z_k(\omega) := 2d_k(\omega) - 1$ e

$$s_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} z_k(\omega) \equiv \text{ excesso de 1s nos n primeiros dígitos.}$$

Mostre que

$$M(t) := \int_0^1 e^{t s_n(\omega)}\, d\omega = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \tag{1.18}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Diferenciando com respeito à t, mostre que $\int_0^1 s_n(\omega)\, d\omega = M'(0) = 0$ e $\int_0^1 s_n^2(\omega)\, d\omega = M''(0) = n$.

A ideia é dividir a integral $\int_0^1$ nos intervalos diádicos da forma $(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

Ex. 1.15 — Seja Ω um espaço métrico com distância d. Ω é dito **separável** se existe um conjunto enumerável $\Omega_0 \subset \Omega$ que é denso em Ω (i.e., todo ponto em Ω é limite de uma sequência de pontos em Ω_0).

1. Mostre que $\sigma\langle\text{bolas abertas em } \Omega\rangle \subset \mathcal{B}(\Omega)$.
2. Mostre que $\sigma\langle\text{bolas abertas em } \Omega\rangle = \mathcal{B}(\Omega)$ se Ω é separável.
3. Mostre que $\Omega = \mathbb{R}$ é separável com a métrica usual
4. Conclua que $\sigma\langle\text{bolas abertas em } \mathbb{R}\rangle = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ex. 1.16 — Suponha que μ_1 e μ_2 são medidas em $\sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ geradas pela classe $\mathcal{F}_0$. Suponha também que a desigualdade

$$\mu_1(A) \leq \mu_2(A) \tag{1.19}$$

é válida para todo A em $\mathcal{F}_0$.

1. Mostre que se $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra e μ_1 e μ_2 são σ-finitas em $\mathcal{F}_0$, então (1.19) vale para todo $A \in \sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$.

   (Dica: primeiramente trate o caso em que μ_2 é finita.)

2. Mostre através de um exemplo que (1.19) pode não ser verdade para algum $A \in \sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ se:

   a) $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra mas μ_1 e μ_2 não são σ-finita em $\mathcal{F}_0$;

   b) Se μ_1 e μ_2 são σ-finitas em $\mathcal{F}_0$, mas $\mathcal{F}_0$ é somente um π-sistema.

Ex. 1.17 — Príncipio de Littlewood Suponha que $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra, μ é uma medida em $\sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ e μ é σ-finita em $\mathcal{F}_0$.

1. Suponha $B \in \sigma\langle \mathcal{F}_0 \rangle$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe uma sequência disjunta de $\mathcal{F}_0$-conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ tais que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - B\big) \leq \epsilon$.
2. Suponha $B \in \sigma\langle \mathcal{F}_0 \rangle$, $\mu(B) < \infty$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe um $\mathcal{F}_0$-conjunto A tal que $\mu(A \triangle B) \leq \epsilon$.
3. Mostre através de um exemplo que a conclusão anterior pode ser falsa se B tiver uma medida infinita.

Ex. 1.18 — O seguinte exercício mostra que não importa em qual ordem somamos um número infinito de termos positivos. Isso é útil para mostrar rigorosamente os axiomas de medida para a medida de contagem em qualquer Ω. Observe que, se houver termos negativos, a ordem é importante.

Dado I um conjunto infinito e seja f uma função de I para $[0,\infty]$. A soma de f sobre I é definida como

$$\sum_{i\in I} f(i) := \sup\Big\{\sum_{i\in H} f(i) : \ H \subset I, H \text{ é finito}\Big\}.$$

Mostre que

1. para toda partição $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ de I em subconjuntos disjuntos não-vazios I_k,
$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I_k} f(i)\Big)$$

2. Se I é enumerável, então
$$\sum_{i\in I} f(i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f(i_m)$$

para toda enumeração $i_1, i_2, \ldots$ dos pontos em I.

3. Prove que

$$\mu(A) := \sum_{a \in A} f(a)\,, \forall A \subseteq X$$

definida acima é uma medida

Ex. 1.19 — Mostre que

$$P\left[|s_n/n| \geq \epsilon\right] \leq 2e^{-n\epsilon^2/2}$$

para todo $\epsilon > 0$.
Dica : Use (1.18) e a desigualdade $(e^x + e^{-x})/2 \leq \exp(x^2/2)$ que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.

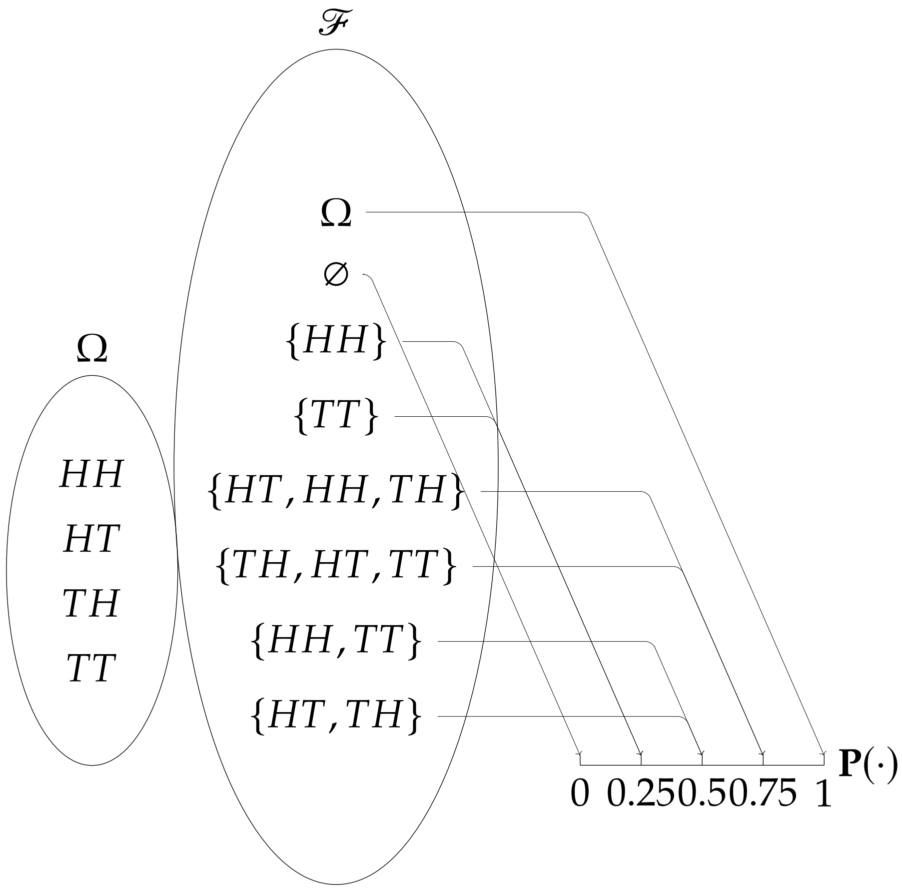


Figura 1.1: Relação entre o espaço amostral, σ-álgebra e a medida de probabilidade.

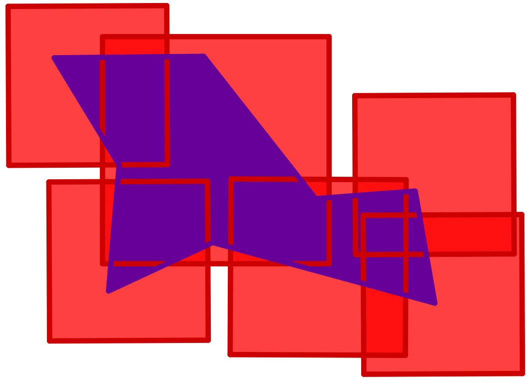
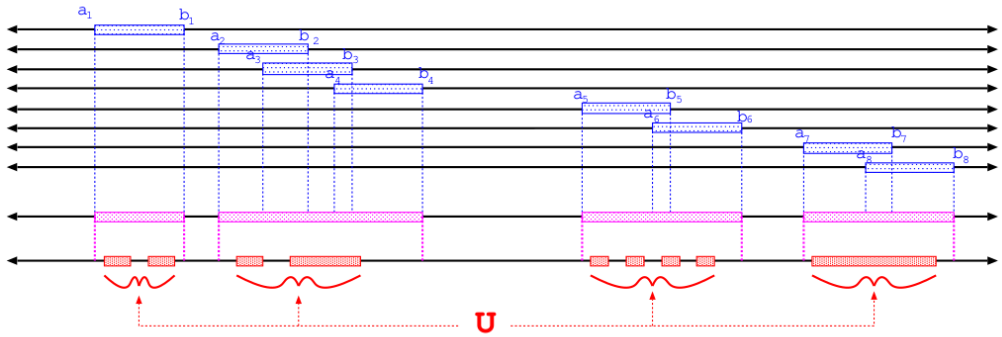


Figura 1.2: Medida externa

Figura 1.3: Os intervalos $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \ldots, (a_8, b_8]$ cobrem U - [2]



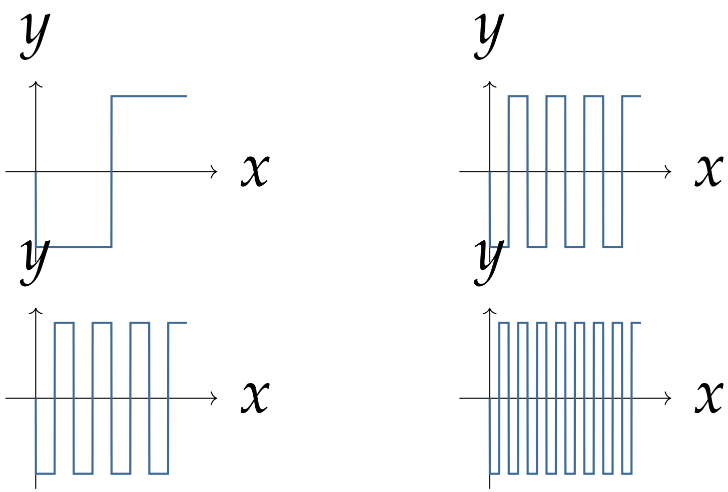


Figura 1.4: Funções de Rademacher z_k.

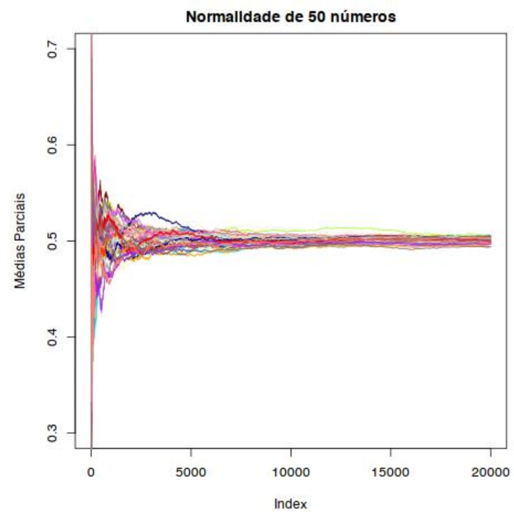


Figura 1.5: Dado uma base, um número normal é um número real cujos algarismos aparecem todos com a mesma frequência.

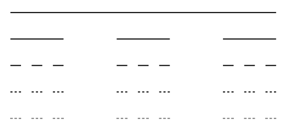


Figura 1.6: O conjunto de Cantor