Nome:

Exercício	Pontos
1	
2	
3	
4	
Total	

GABARITO PROVA 2 (29/04/2024)
Álgebra Linear
Prof. Cristian F. Coletti
1o Quadrimestre 2024

Exercícios

Ex. 1 — (3 pontos) Responda os itens abaixo justificando cada uma das suas respostas.

(a)Encontre uma transformação linear não nula $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) : z = 3x - 5y \text{ com } x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Observe que $N(T) = \{(x, y, 3x - 5y); x, y \in \mathbb{R}\}$. Como $(x, y, 3x - 5y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -5)$ os vetores $(1, 0, 3)$ e $(0, 1, -5)$ geram o $N(T)$. Por outro lado, esses dois vetores são LI pois nehum deles é um múltiplo não nulo do outro, i.e.

$$\alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, -5) = (0, 0, 0)$$

se e somente se $\alpha = \beta = 0$. Em outras palavras, $\{(1, 0, 3), (0, 1, -5)\}$ é uma base de $N(T)$. Agora, completamos a uma base de $\mathbb{R}^3$ acrescentando o vetor $(0, 0, 1)$. Como $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e os vetores $(1, 0, 3), (0, 1, -5)$ e $(0, 0, 1)$ são L.I. (Verifique), eles formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Como esses três vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$ temos que para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ existem α, β, γ tais que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, -5) + \gamma(0, 0, 1).$$

Resolvendo o sistema de equações lineares que resulta da igualdade acima temos que

$$\alpha = x, \beta = y, \gamma = z - 3x + 5y.$$

Daí, podemos concluir que

$$T((x, y, z)) = xT((1, 0, 3)) + yT((0, 1, -5)) + (z - 3x + 5y)T((0, 0, 1)).$$

Como $(1, 0, 3), (0, 1, -5) \in N(T)$ temos que $T((1, 0, 3)) = 0 = T((0, 1, -5))$. Escolhendo de forma arbitrária $T((0, 0, 1)) = (0, 1, 0)$ temos que

$$T((x, y, z) = (0, z - 3x + 5y, 0).$$

(b)Exiba uma base do núcleo e uma base da imagem e verifique que o teorema do núcleo e da imagem se satisfaz.

Vimos acima que $\{(1, 0, 3), (0, 1, -5), (0, 0, -1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Logo, $3 = dim(\mathbb{R}^3) = 2 + 1 = dim(N(T)) + dim(Im(T))$.
Por outro lado,$\{(1, 0, 3), (0, 1, -5)\}$ é uma base do $N(T)$ e (0,1,0) é uma base para a imagem de T.

Ex. 2 — (2 pontos) Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{B} = \{1-x, 1+x, 1-x^2\}$. Responda os itens abaixo justificando cada uma das suas respostas.

(a)Calcule, sem encontrar uma fórmula explícita para T, o valor de $T(1+2x+3x^2)$.

Seja $u = 1+2x+3x^2$. Calculemos as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Assim,

$$1+2x+3x^2 = \alpha(1-x) + \beta(1+x) + \gamma(1-x^2).$$

Logo,

$$1+2x+3x^2 = (\alpha+\beta+\gamma) + (-\alpha+\beta)x + (-\gamma)x^2. \tag{1}$$

Daí, $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -3$. Em outras palavras,

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

e, como,

$$[T(u)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$$

temos que

$$[T(u)]_{\mathcal{B}} == \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Daí, por fim, temos que

$$\begin{aligned} T(u) &= 0 \times (1-x) + 3 \times (1+x) + (-3) \times (1-x^2) \\ &= 3(x+x^2). \end{aligned}$$

(b)Decida se T é bijetora ou não.

T é bijetora se e somente se T é inversível se e somente se a matriz de T é inversível se e somente se o determinante da matríz de T em qualquer base é diferente de zero. Como $det([T]_{\mathcal{B}}) = 3 \times 1 \times 1 = 3 \neq 0$ concluimos que T é bijetora.

Ex. 3 — (3 pontos) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (3x, x+5y+2z, x+2z)$. Responda os itens abaixo justificando cada uma das suas respostas.

(a)Verifique que T é uma transformação linear. Seja $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}^3$. É imediato veificar que

$$T(u+\lambda v) = T(u) + \lambda T(v).$$

Isto é, T é linear.

(b)Encontre os autovalores e os autoespaços associados a esses autovalores.

Iremos calcular a matriz de T com relação à base canônica. Logo,

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $P_T(\lambda) = det([T] - \lambda I_3)$ e

$$[T] - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

temos que $P_T(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)$. Os auotvalores de T são as raízes de $P_T(\lambda)$. Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = 2$.

Sendo que

$$V_\lambda = \{u = (x,y,z) : ([T] - \lambda I_3)[u] = [0_{\mathbb{R}^3}]\} \tag{2}$$

temos que

$$V_3 = \{u = (x,y,z) : ([T] - \lambda I_3)[u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} [u] = [0_{\mathbb{R}^3}]\}$$

Resolvendo, $V_3 = [\{(1, -3/2, 1)\}]$.

Analogamente, $V_5 = [\{(0,1,0)\}]$ e $V_2 = [\{(0, -2/3, 1)\}$.

(c)T é diagonalizável?

Como $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e T possui três autovalorers diferentes, T é diagonalizável.

Ex. 4 — (2 pontos) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira prove-a. Se for falsa apresente um contraexemplo.

(a)Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Se existem $u, v, w \in U$ tais que $T(w) = T(u) + T(v)$ então $w = u + v$.

Falso.

Seja $U = V = \mathbb{R}^3$ e T a aplicação nula, isto é $T(u) = (0,0,0)$ para cada $u \in \mathbb{R}^3$. Seja $u = e_1, v = e_2$ e $w = e_3$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$= Logo $T(e_3) = (0,0,0) = T(e_1) + T(e_2)$ e $e_3 \neq e_1 + e_2$.

(b)Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. T é sobrejetora se e somente se $dim(N(T)) = dim(U) - dim(V)$.

Verdadeiro.

Observe que U eV têm dimensão finita. Agora, T é sobrejetora se e somente se $Im(T) = V$ e daí $dim(Im(T)) = dim(V)$. Do teorema do núcleo e da imagem temos que $dim(U) = dim(N(T)) + dim(Im(T)) = dim(N(T)) + dim(V)$ se e somente se $dim(N(T)) = dim(U) - dim(V)$.