# Universidade Federal do ABC

## Funções de Uma Variável (FUV)

### Lista de Treinamento – Derivadas e Aplicações

## Lista de Questões

**Q1. (Cálculo de Derivada pela Definição)**
Considere a função real $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

(a) Calcule $f'(3)$ utilizando estritamente o limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(b) Obtenha a expressão da função derivada $f'(x)$ para qualquer $x > -\frac{3}{2}$ aplicando a definição formal via limite.

**Q2. (Diferenciabilidade e Parâmetros em Funções por Partes)**
Determine os valores das constantes reais $a$ e $b$ para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & \text{se } x \leq 0, \\ \cos(x) + e^{2x}, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

seja diferenciável em $x = 0$. Justifique a resposta analisando primeiramente a continuidade de $f$ e, a seguir, os limites laterais do quociente incremental.

**Q3. (Taxas Relacionadas)**
Um observador está em repouso na margem de um rio reto, posicionado a uma distância fixa de 30 m da linha de trajetória de uma lancha. A lancha navega em linha reta com velocidade constante de 20 m/s. No instante em que a distância direta entre a lancha e o observador é de 50 m:

(a) A que taxa está variando a distância direta entre a lancha e o observador?

(b) A que taxa angular (em radianos por segundo) o observador deve girar a cabeça para acompanhar o deslocamento da lancha?

**Q4. (Derivação Implícita e Derivada da Função Inversa)**

(a) Considere a curva algébrica dada pela equação implícita (*Folium de Descartes*):

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Verifique que o ponto $P(3, 3)$ pertence à curva e determine a equação da reta tangente a ela nesse ponto.

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^5 + 2x^3 + 4x + 1$. Mostre que $g$ admite inversa diferenciável em toda a reta real e determine o valor de $(g^{-1})'(8)$.

**Q5. (Polinômio de Taylor e Diferencial Linear)**
Seja $f(x) = \ln(1 + 2x)$ definida para $x > -\frac{1}{2}$.

(a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de $f(x)$ em torno de $x_0 = 0$.

(b) Utilizando o conceito de diferencial ($df = f'(x_0)\Delta x$), estime a variação $\Delta f = f(0{,}05) - f(0)$.

(c) Compare a aproximação linear obtida no item (b) com o valor estimado pelo polinômio de Taylor $P_3(0{,}05)$.