Aplicações de Cálculo Diferencial

Problemas Clássicos de Otimização: Máximos e Mínimos

Fuv

Problema 1: Caixa Aberta de Custo Mínimo

Enunciado:

Deseja-se construir uma caixa retangular aberta no topo com base quadrada e volume fixado em $V = 32\ \text{m}^3$. O material da base custa **R$ 3,00** por metro quadrado e o material das quatro faces laterais custa **R$ 2,00** por metro quadrado.

Objetivo:

- Determine as dimensões (lado da base x e altura h) que **minimizam o custo total** de fabricação da caixa.
- Calcule o valor do custo mínimo resultante.

Problema 1: Solução – Modelagem e Ponto Crítico

1. Vínculo do Volume:

$$V = x^2 h = 32 \implies h = \frac{32}{x^2}, \quad x > 0$$

2. Função Custo Total $C(x)$:

$$C(x) = \underbrace{3 \cdot x^2}_{\text{Base}} + \underbrace{2 \cdot (4xh)}_{\text{Laterais}} = 3x^2 + 8x\left(\frac{32}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{256}{x}$$

3. Derivada Primeira e Ponto Crítico:

$$C'(x) = 6x - \frac{256}{x^2} = 0 \implies 6x^3 = 256 \implies x^3 = \frac{128}{3} \approx 42{,}67$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{128}{3}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \approx 3{,}49 \text{ m}$$

Problema 1: Solução – Verificação e Resposta

4. Teste da Segunda Derivada:

$$C''(x) = 6 + \frac{512}{x^3}$$

Como $x > 0$, temos $C''(x) > 0$ em todo o domínio, confirmando um **mínimo absoluto global**.

5. Dimensões Ótimas e Custo:

- Lado da base: $x = \sqrt[3]{\frac{128}{3}} \approx 3{,}49$ m
- Altura: $h = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{(128/3)^{2/3}} \approx 2{,}62$ m
- Custo total mínimo:

$$C_{\min} = 3(3{,}49)^2 + \frac{256}{3{,}49} \approx 36{,}54 + 73{,}35 \approx \textbf{R\$ 109,89}$$

Problema 2: Maior Cilindro Inscrito em Esfera

Enunciado:

Considere uma esfera sólida de raio constante $R > 0$. Deseja-se usinar um cilindro circular reto centrado no interior desta esfera, com suas bases circulares apoiadas na superfície esférica.

Objetivo:

- Encontre o raio da base r e a altura total h do cilindro que possui o **maior volume possível**.
- Expresse o volume máximo como fração do volume total da esfera envolvente.

Problema 2: Solução – Modelagem e Ponto Crítico

1. Relação Geométrica: Seja $h = 2y$, onde y é a meia-altura. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo central:

$$r^2 + y^2 = R^2 \implies r^2 = R^2 - y^2, \quad 0 < y < R$$

2. Função Volume em termos de y:

$$V(y) = \pi r^2 h = \pi(R^2 - y^2)(2y) = 2\pi(R^2 y - y^3)$$

3. Derivada Primeira e Ponto Crítico:

$$V'(y) = 2\pi(R^2 - 3y^2) = 0 \implies y^2 = \frac{R^2}{3} \implies y = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Como $V''(y) = -12\pi y < 0$ para $y > 0$, trata-se de um **máximo absoluto**.

Problema 2: Solução – Dimensões e Fração Volumétrica

4. Dimensões do Cilindro Ótimo:

- Altura total: $h = 2y = \frac{2}{\sqrt{3}}R$
- Raio da base: $r = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

5. Comparação com a Esfera:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \left(\frac{2}{3}R^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$$

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{esfera}}} = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 57{,}74\%$$

Problema 3: Tempo Mínimo de Deslocamento

Enunciado:

Um salva-vidas localizado no ponto $A(0, a)$ em terra firme precisa socorrer um banhista em apuros no mar no ponto $B(d, -b)$, onde a linha da costa é o eixo horizontal $y = 0$.

- Na areia, ele corre a uma velocidade constante v_1.
- Na água, ele nada a uma velocidade constante v_2, sendo $v_1 > v_2$.

Objetivo:

- Determine o ponto de entrada na água $P(x, 0)$ que **minimiza o tempo total** de percurso $T(x)$.
- Mostre que a solução conduz à **Lei da Refração de Snell**.

Problema 3: Solução – Formulação do Tempo Total

1. **Distâncias Percorridas:**

   - Trecho em terra: $d_1 = \sqrt{x^2 + a^2}$
   - Trecho na água: $d_2 = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$

2. **Função Tempo Total $T(x)$ com $x \in [0, d]$:**

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}$$

3. **Derivação em relação a x:**

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0$$

4. Interpretação Trigonométrica dos Ângulos com a Normal:

- Seja θ_1 o ângulo com a normal à costa em terra: $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
- Seja θ_2 o ângulo com a normal à costa no mar: $\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$.

Substituindo na equação de ponto crítico $T'(x) = 0$:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2} \iff \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \textbf{(Lei de Snell)}$$

Conclusão: Como $T''(x) = \frac{a^2}{v_1(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2((d-x)^2+b^2)^{3/2}} > 0$, o ponto crítico encontrado fornece de forma unívoca o **tempo mínimo absoluto**.

Problema 4: O Corredor em "L" e o Comprimento Máximo

Enunciado:

Dois corredores perpendiculares de larguras $a = 8$ m e $b = 1$ m se encontram em um canto reto em forma de "L". Deseja-se transportar uma viga rígida e fina na horizontal contornando a esquina.

Objetivo:

- Modele o comprimento $L(\theta)$ de um segmento que toca as paredes externas e apoia-se na quina interna formando um ângulo θ com a parede do corredor de largura a.
- Determine o **maior comprimento possível de viga** capaz de contornar essa curva sem emperrar (problema do *mínimo dos comprimentos limitantes*).

Problema 4: Solução – Modelagem da Viga Limitante

1. Expressão do Comprimento $L(\theta)$: Decompondo a linha da viga que tangencia o vértice interno em função do ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$L(\theta) = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{b}{\cos\theta} = \frac{8}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

2. Ideia Matemática Central:

- Para conseguir contornar a curva, o comprimento real da viga deve ser menor ou igual ao **valor mínimo** de $L(\theta)$ em todo o intervalo $(0, \pi/2)$.
- Ou seja: $L_{\text{máx transportável}} = \min_{\theta \in (0,\pi/2)} L(\theta)$.

Problema 4: Solução – Cálculo do Ponto Crítico e Resposta

3. Derivada Primeira:

$$L'(\theta) = -\frac{8\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^3\theta - 8\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$

Igualando a zero:

$$\operatorname{sen}^3\theta - 8\cos^3\theta = 0 \implies \operatorname{tg}^3\theta = 8 \implies \operatorname{tg}\theta = 2$$

4. Relações Trigonométricas e Comprimento Máximo:

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$L_{\min} = \frac{8}{2/\sqrt{5}} + \frac{1}{1/\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \approx \textbf{11,18 metros}$$

Resposta: O maior comprimento que consegue passar pela curva é de $5\sqrt{5}$ m.