Funções de uma Variável
Revisão rápida de
Limite e Continuidade

Cristian Favio Coletti

Universidade Federal do ABC

13 de setembro de 2025

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

O Conceito de Limite

Aproximação e comportamento de funções

Definição Intuitiva

O limite de uma função descreve o comportamento da função quando a variável independente se aproxima de um determinado valor.

O Conceito de Limite

Aproximação e comportamento de funções

Definição Intuitiva

O limite de uma função descreve o comportamento da função quando a variável independente se aproxima de um determinado valor.

Exemplo

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

O Conceito de Limite

Aproximação e comportamento de funções

Definição Intuitiva

O limite de uma função descreve o comportamento da função quando a variável independente se aproxima de um determinado valor.

Exemplo

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.
O que acontece quando x *se aproxima de 1?*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Definição ϵ-δ

Definition (Limite)

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a (exceto possivelmente em a). Dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição ϵ-δ

Definition (Limite)

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a (exceto possivelmente em a). Dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Interpretação

Podemos tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, tomando x suficientemente próximo de a.

Propriedades Fundamentais

Theorem (Propriedades dos Limites)

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$, *então:*

Propriedades Fundamentais

Theorem (Propriedades dos Limites)

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$*, então:*

- $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = L + M$

Propriedades Fundamentais

Theorem (Propriedades dos Limites)

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, então:*

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$

Propriedades Fundamentais

Theorem (Propriedades dos Limites)

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, então:*

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot L$

Propriedades Fundamentais

Theorem (Propriedades dos Limites)

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$, *então:*

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot L$
- $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

Propriedades Fundamentais

Theorem (Propriedades dos Limites)

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, então:*

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot L$
- $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$

Limites Laterais

Comportamento pela esquerda e pela direita

Limite à Direita

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

x se aproxima de a por valores maiores que a

Limites Laterais

Comportamento pela esquerda e pela direita

Limite à Direita

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

x se aproxima de a por valores maiores que a

Limite à Esquerda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

x se aproxima de a por valores menores que a

Limites Laterais

Comportamento pela esquerda e pela direita

Limite à Direita

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

x se aproxima de a por valores maiores que a

Limite à Esquerda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

x se aproxima de a por valores menores que a

Theorem (Existência do Limite)

O limite $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe se, e somente se:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Definição de Continuidade

Definition (Função Contínua)

Uma função f é contínua em $x = a$ se:

Definição de Continuidade

Definition (Função Contínua)

Uma função f é contínua em $x = a$ se:

1. $f(a)$ está definida

Definição de Continuidade

Definition (Função Contínua)

Uma função f é contínua em $x = a$ se:

1. $f(a)$ está definida
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

Definição de Continuidade

Definition (Função Contínua)

Uma função f é contínua em $x = a$ se:

1. $f(a)$ está definida
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Definição de Continuidade

Definition (Função Contínua)

Uma função f é contínua em $x = a$ se:

1. $f(a)$ está definida
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo

A função $f(x) = x^2$ é contínua em todos os pontos:

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a)$$

Tipos de Descontinuidade

Descontinuidade Removível

O limite existe mas $f(a)$ não está definida ou $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$

Tipos de Descontinuidade

Descontinuidade Removível

O limite existe mas $f(a)$ não está definida ou $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$

Descontinuidade de Salto

Os limites laterais existem mas são diferentes

Tipos de Descontinuidade

Descontinuidade Removível

O limite existe mas $f(a)$ não está definida ou $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Descontinuidade de Salto

Os limites laterais existem mas são diferentes

Descontinuidade Infinita

Pelo menos um dos limites laterais é infinito

Tipos de Descontinuidade

Descontinuidade Removível

O limite existe mas $f(a)$ não está definida ou $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Descontinuidade Infinita

Pelo menos um dos limites laterais é infinito

Descontinuidade de Salto

Os limites laterais existem mas são diferentes

Descontinuidade Essencial

Pelo menos um dos limites laterais não existe

Teoremas sobre Continuidade

Theorem (Teorema do Valor Intermediário)

Se f é contínua em $[a, b]$ e k está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Teoremas sobre Continuidade

Theorem (Teorema do Valor Intermediário)

Se f é contínua em $[a, b]$ e k está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Theorem (Teorema de Weierstrass)

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f atinge seu valor máximo e mínimo nesse intervalo.

Exemplos Práticos

Exemplo

Verifique a continuidade de $f(x) = \frac{1}{x}$*:*

Exemplos Práticos

Exemplo

Verifique a continuidade de $f(x) = \frac{1}{x}$*:*

- *Contínua em* $\mathbb{R} - \{0\}$
- *Descontínua em* $x = 0$ *(descontinuidade infinita)*

Exemplos Práticos

Exemplo

Verifique a continuidade de $f(x) = \frac{1}{x}$*:*

- *Contínua em* $\mathbb{R} - \{0\}$
- *Descontínua em* $x = 0$ *(descontinuidade infinita)*

Exemplo

Estude a continuidade de:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \leq 1 \\ 2x - 1 & se\ x > 1 \end{cases}$$

Obrigado!

Dúvidas?

Email: cristian.coletti@ufabc.edu.br

Atendimento: Quintas-feiras, das 14:00 às 16:00 horas, na sala 817 do Bloco B.

Funções de uma Variável

Derivada: Motivação, definição e primeiros exemplos

Cristian F. Coletti

16 de agosto de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC

□ Taxa de crescimento populacional

□ Velocidade média e instantânea

□ Variação de volume

□ Taxa de variação média e instantânea

□ Definição de derivada

Exemplos

Taxa de crescimento populacional

Taxa de crescimento médio (ou relativo) populacional

- Seja $N(t)$ o número de individuos de uma certa população.
- Se $t_1 < t_2$ são dois instantes de tempo, então $N(t_1)$ e $N(t_2)$ denota o tamanho da população nesses instantes de tempo.
- $N(t_2) - N(t_1)$ é a variação da população no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$

Taxa de crescimento médio (ou relativo) populacional

A razão

$$\frac{N(t_2) - N(t_1)}{t_2 - t_1}$$

representa a variação média da população por unidade de tempo no intervalo $[t_1, t_2]$.

Observação

Definindo $\Delta N := N(t_2) - N(t_1)$ *e* $\Delta t = t_2 - t_1$ *temos que* $t_2 = t_1 + \Delta t$ *e que*

$$\frac{N(t_1 + \Delta t) - N(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Taxa de crescimento instantânea de uma população

Exemplo

- Considere uma população de bactérias em meio homogêneo, $N(t) = 100 \times 2^t$ onde $t \geq 0$.
- Seja $t_1 > 0$ e $t_2 = t_1 + \Delta t$ (Δt pode ser positivo ou negativo). A taxa de variação média correspondente é

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta N}{\Delta t} &= \frac{100 \times 2^{t_1+\Delta t} - 100 \times 2^{t_1}}{\Delta t} \\
&= 100 \times 2^{t_1} \times \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

Taxa de crescimento instantânea de uma população

- Se $\Delta t \approx 0, \Delta N \approx 0$, entretanto

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 100.2^{t_1}\frac{2^{\Delta t}-1}{\Delta t} \approx 100.2^{t_1}\ln(2).$$

- A taxa de variação populacional instantânea em t_1 é definida como sendo

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0} 100.2^{t_1}\frac{2^{\Delta t}-1}{\Delta t}\\ &= 100.2^{t_1}\ln(2).\end{aligned}$$

Velocidade média e instantânea

Velocidade média

- Considere uma partícula que se desloca ao longo de uma linha reta conforme o tempo muda.
- Denote a posição da partícula com relação a uma posição de referência O por $s(t)$.
- Neste caso a razão incremental entre t_1 e t_2

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

representa a velocidade média entre t_1 e t_2.

Exemplo: velocidade instantânea

O movimento de queda livre dos corpos próximos à superfície da Terra pode ser descrito pela equação

$$s(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Exemplo: velocidade instantânea

O movimento de queda livre dos corpos próximos à superfície da Terra pode ser descrito pela equação

$$s(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Observação

- *h_0 e v_0 são a altura e a velocidade inicial, i.e $t = 0$.*
- *Consideramos um referencial vertical com sentido positivo para baixo.*

Exemplo: velocidade instantânea

- Se o corpo começar em repouso $v_0 = 0$ e definirmos a origem como a altura inicial temos que $h_0 = 0$. Assim

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

- A velocidade média do corpo em queda livre entre t_1 e t_2 é

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}g(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{1}{2}g(t_2 + t_1).
\end{aligned} \tag{1}$$

Exemplo: velocidade instantânea

Observação

Escolhendo $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta t + t_1)\\ &= gt_1 + \frac{1}{2}g\Delta t.\end{aligned}$$

Então

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} gt_1 + \frac{1}{2}g\Delta t = gt_1$$

representa a velocidade instantânea em t_1.

Variação de volume

Taxa de variação do volume

Observação

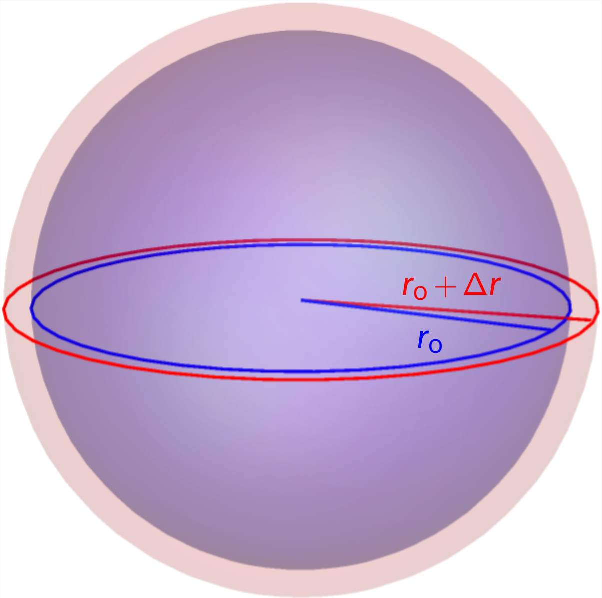
Não é necessário que a variável independente seja uma variável temporal.

Exemplo

- Considere uma célula aproximadamente esférica em crescimento cujo volume $V(r)$ é função do raio. Neste caso

$$\frac{\Delta V}{\Delta r}$$

representa a taxa de variação média do volume.


$r_o + \Delta r$
r_o

Taxa de variação do volume

- Sendo que $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ vemos que a variação do volume entre r_0 e $r_0 + \Delta r$ é

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r_0 + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r_0^3.$$

- A taxa de variação média do volume entre r_0 e $r_0 + \Delta r$ é

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta r} &= \frac{4}{3}\pi \frac{(r_0 + \Delta r)^3 - r_0^3}{\Delta r} \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{3r_0^2\Delta r + 3r_0\Delta r^2 + \Delta r^3}{\Delta r} \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(3r_0^2 + 3r_0\Delta r + \Delta r^2\right) \end{aligned}$$

Taxa de variação do volume

Como

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{4}{3}\pi\left(3r_0^2 + 3r_0\Delta r + \Delta r^2\right)$$

vemos que se $\Delta r \approx 0$, então

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} \approx \frac{4}{3}\pi 3r_0^2 = 4\pi r_0^2.$$

De fato, a taxa instantânea de variação do volume em r_0 é

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{4}{3}\pi\left(3r_0^2 + 3r_0\Delta r + \Delta r^2\right)\\ &= 4\pi r_0^2.\end{aligned}$$

Taxa de variação média e instantânea

Quociente de Newton (Razão incremental)

De modo geral,

- Seja $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função .
- Sejam $x_0, x\in(a,b)$.
- O quociente de Newton é

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

- $\Delta x = x - x_0$ é o incremento da variável independente entre x_0 e x.
- $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ é o incremento correspondente da variável dependente.

Quociente de Newton (Razão incremental)

O quociente

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (x = x_0+\Delta x).\end{aligned}$$

representa a variação média entre x_0 e x.

- O quociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é chamado de **taxa de variação média**.
- $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ também é chamado de **quociente de Newton** ou **razão incremental**.

Taxa de variação instantânea

De um modo geral, definimos a taxa de variação instantânea por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ou, de forma equivalente, por

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x = x_0 + \Delta x).$$

Observação

Veremos a seguir que a taxa de variação instantânea em x_0 nada mais é que a derivada de f em x_0.

Definição de derivada

Diferenciabilidade

Definição

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função e seja* $c \in (a, b)$. *A função* f *é diferenciável em* c *se*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existir. Quando este limite existe, ele é denotado por $f'(c)$ *e é chamado a derivada de* f *em* c. *Se* f *for diferenciável em cada ponto de seu domínio, diremos que* f *é diferenciável.*

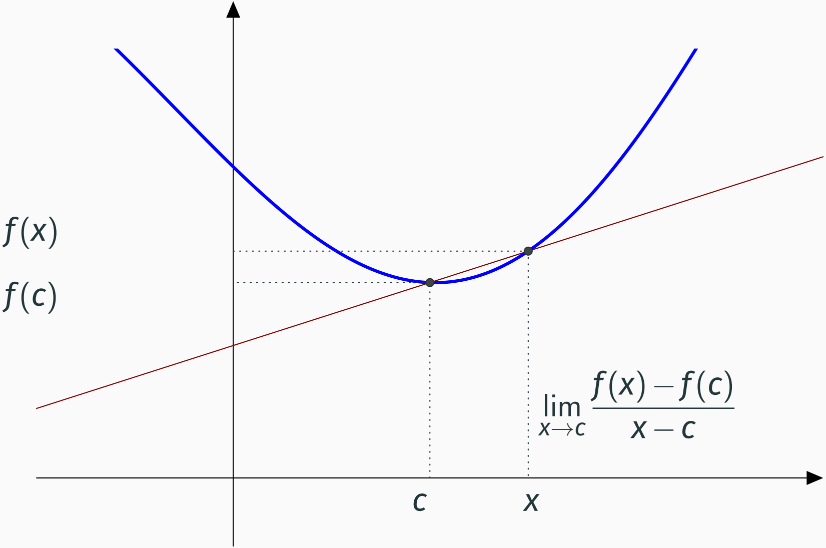
Diferenciabilidade

Observação

Se f for diferenciável em c, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Definição da Derivada



Definição equivalente de derivada

Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função, $c \in (a,b)$ e faça $h = x - c$. Logo, $x = c + h$ e $h \to 0 \iff x \to c$. Fazendo as substituições adequadas temos que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}. \end{aligned}$$

se o limite existir.

Exemplo: função constante

Seja $f(x) = K$. Logo,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{K - K}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $f'(c) = 0$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo: x^3

Seja $f(x) = x^3$. Logo,

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(c+h)^3 - c^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{c^3 + 3c^2h + 3ch^2 + h^3 - c^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3c^2h + 3ch^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3c^2 + 3ch + h^2)}{h}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Então

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} 3c^2+3ch+h^2 \\ &= 3c^2. \end{aligned}$$

Desta forma, $f'(c)=3c^2$ para qualquer $c\in\mathbb{R}$.

Exemplo $\sqrt{x}$

Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $c > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{c+h} - \sqrt{c}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{c+h} - \sqrt{c}}{h} \right) \left(\frac{\sqrt{c+h} + \sqrt{c}}{\sqrt{c+h} + \sqrt{c}} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{c+h-c}{h} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{c+h} + \sqrt{c}} \right)
\end{aligned}$$

Exemplo

Concluimos que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{c+h}+\sqrt{c}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

para qualquer $c > 0$.

Funções de uma Variável

Derivada: Definição, exemplos e propriedades

Cristian F. Coletti

16 de agosto de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC

Definição de derivada

Diferenciabilidade: Revisão

Definição

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função e seja* $c \in (a, b)$*. A função* f *é diferenciável em* c *se*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existir. Quando este limite existe, ele é denotado por $f'(c)$ *e é chamado a derivada de* f *em* c*. Se* f *for diferenciável em cada ponto de seu domínio, diremos que* f *é diferenciável.*

Definição equivalente de derivada: Revisão

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função, $c\in(a,b)$ e faça $h=x-c$. Logo, $x=c+h$ e $h\to 0 \iff x\to c$. Fazendo as substituições adequadas temos que

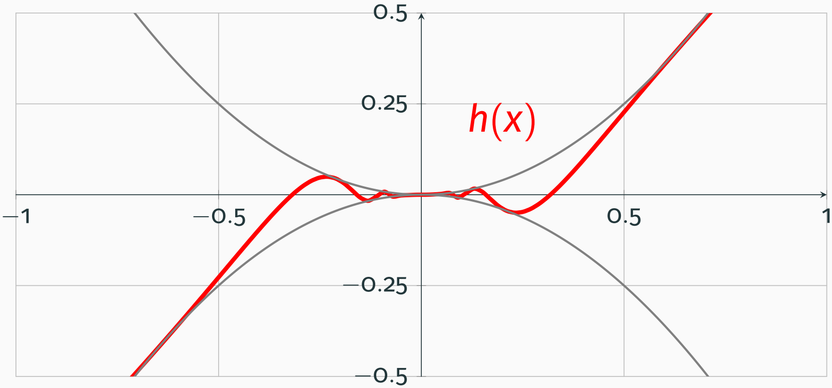
$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}. \end{aligned}$$

se o limite existir.

Exemplo

Seja

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$



- Vamos estudar a diferenciabilidade da função h no ponto $x = 0$.
- Observe que para cada $x \neq 0$

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemplo

- Observe que

$$\begin{aligned} h'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- $h'(0) = 0$.

Pergunta

A função u definida por

$$u(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

é continua quando $x = 0$? É diferenciável quando $x = 0$?

- □ **Resposta**: Exercício.
- □ **Dica**: Estude detalhadamente o exemplo imediatamente anterior.

Notação

- Notação de Fermat: A derivada de f em c é denotada por

$$f'(c).$$

- Notação de Leibniz: A derivada de f em c é denotada da seguinte forma

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$$

Notação

- Defina
$$\text{Dom}\,(f') := \{x \in \text{ Dom}\,(f) : f \text{ é diferenciável em } x\}.$$
- Defina $f' : \text{ Dom}\,(f') \to \mathbb{R}$ tal que
$$f' : x \mapsto f'(x).$$
- f' recebe o nome de função derivada (primeira) de f ou de derivada (primeira) de f.

Notação

- **Exemplo:** Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Então, $f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
- Se $f(x) = k$, então $f'(x) = 0$. Aqui, $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R}$.
- Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$. Aqui, $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

Notação

- Podemos denotar $f'(x)$ por
$$\frac{df}{dx}.$$
- **Exemplo:** Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Então,
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Propriedades

Derivada lateral direita

Definição

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e seja $x_0\in(a,b)$. Diremos que f é diferenciável à direita em x_0 se existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

O valor deste limite é denotado por $f'_+(x_0)$.

Derivada lateral direita

Observação

Fazendo $h = x - x_0$ *concluimos que*

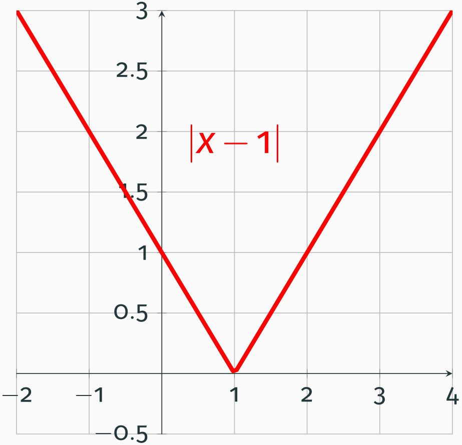
$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Derivada lateral direita: Exemplo

Seja

$$w(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{if } x \geq 1 \\ 1-x & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

- Vamos calcular $w'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{w(x)-w(1)}{x-1}$.
- Observe que se $x \to 1^+, x > 1$ e $w(x) = x-1$.



Derivada lateral direita: Exemplo

- Por fim,

$$
\begin{aligned}
w'_{+}(1) &= \lim_{x \to 1^{+}} \frac{w(x) - w(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1^{+}} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.
\end{aligned}
$$

- $w'_{+}(1) = 1.$

Derivada lateral esquerda

Definição

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e seja $x_0\in(a,b)$. Diremos que f é diferenciável à esquerda em x_0 se existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

O valor deste limite é denotado por $f'_-(x_0)$.

Derivada lateral esquerda

Observação

Fazendo $h = x - x_0$ *concluimos que*

$$\begin{aligned} f'_{-}(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Derivada lateral à esquerda: Exemplo

Retomamos

$$w(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{if } x \geq 1 \\ 1-x & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

- Vamos calcular $w'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{w(x)-w(1)}{x-1}$.
- Observe que se $x \to 1^-, x < 1$ e $w(x) = 1-x$.

Derivada lateral à esquerda: Exemplo

- Por fim,

$$
\begin{aligned}
w'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{w(x)-w(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1.
\end{aligned}
$$

- $w'_-(1) = -1.$

Diferenciabilidade e derivadas laterais

Teorema

f é diferenciável em x_0 se, e somente se, $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ existirem e

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Neste caso $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Observação

Uma forma equivalente de enunciar o resultado acima é f é diferenciável em x_0 se, e somente se, $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ existirem e

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(= f'(x_0)\right).$$

Pontos de não diferenciabilidade: Exemplo

$$|x-1| \text{ não é diferenciável em } x = 1$$

Seja

$$w(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{if } x \geq 1 \\ 1-x & \text{if } x < 1. \end{cases}$$

- Vimos que $W'_+(1) = 1 \neq -1 = w'_-(1)$.
- Podemos concluir que w não é diferenciável em 1.

Exercicio: Verifique que $|x|$ não é diferenciável em 0.

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

Seja

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{if } x \geq 0 \\ 5 - 2x & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

- Vamos verificar que $g(x)$ é diferenciável na origem, i.e. em $x = 0$.
- Faremos isso calculando as derivadas laterais e verificando que ambas existem e que seus valores coincidem.

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

- Observe que quando $x \to 0^+, x > 0$ e $g(x) = x^2 - 2x + 5$.
-
$$\begin{aligned} g'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x + 5 - 5}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x-2)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} x - 2 = -2. \end{aligned}$$
- $g'_+(0) = -2.$

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

- Observe que quando $x \to 0^-, x < 0$ e $g(x) = 5 - 2x$.
- $$\begin{aligned} g'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{(5 - 2x) - 5}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} -2 = -2. \end{aligned}$$
- $g'_-(0) = -2.$
- Como $g'_+(0) = -2 = g'_-(0)$ concluimos que $g'(0) = -2.$

Propriedades

Teorema

Se f é diferenciável em c então f é continua em c.

Demonstração.

Devemos verificar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Observe que, se $x \neq c$,

$$f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) + f(c).$$

Fazendo $x \to c$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) + f(c) \\ &= f'(c).0 + f(c) = f(c) \end{aligned}$$

$\square$

Contraexemplo

Observação

- *Vimos que se uma função é diferenciável em um ponto então ela é continua nesse mesmo ponto.*
- *A recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, a função $w(x) = |x-1|$ é continua em toda parte; no entanto ela não é diferenciável em* 1.

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

Seja

$$h(x) = \begin{cases} ax + b & \text{if } x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b & \text{if } x > -1. \end{cases}$$

- Vamos verificar se existem valores de a e b para os quais $h(x)$ é diferenciável em $x = -1$.
- Faremos isso calculando as derivadas laterais e verificando que ambas existem e que seus valores coincidem.

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

- Se h é diferenciável em -1 então h é continua em -1. Devemos ter

$$\lim_{x \to -1} h(x) = h(-1).$$

- Observe que

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = -a - 1 + 2b, \lim_{x \to -1^-} h(x) = -a + b, h(-1) = -a + b.$$

- Assim, $-a + b = -a - 1 + 2b$ ou $b = -1 + 2b$. Logo $b = 1$.

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

- Para encontrar o valor de a vamos calcular as derivadas laterais e determinar a equação resultante.
- $$h'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{ax + 1 - (-a + 1)}{X - (-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{a(x+1)}{x+1} = a.$$
- $$h'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{ax^3 + x + 2 - (-a + 1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{ax^3 + x + 1 + a}{x+1}$$

Derivadas laterais e diferenciabilidade: Exemplo

- Observe que

$$\frac{ax^3+x+1+a}{x+1} = \frac{a(x^3+1)+(x+1)}{x+1} = a(x^2-x+1)+1$$

- Então

$$h'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} a(x^2-x+1)+1 = 3a+1$$

- $h'_+(-1) = h'_-(-1)$ se e só se $a = 3a+1$. Logo, $a = -\frac{1}{2}$.
- Conclusão: h é diferenciável quando $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$.

Interpretação geométrica

Quociente de Newton: Coeficiente angular da reta secante

- Seja $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e faça $y = f(x)$.
- Sejam $x_0, x \in (a,b)$.
- O quociente de Newton é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

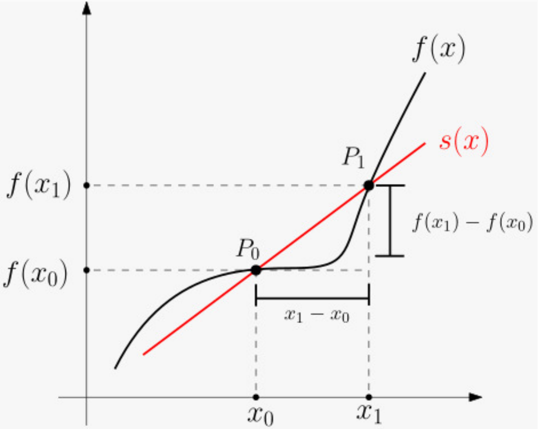
- $\Delta x = x - x_0$ é o incremento da variável independente entre x_0 e x.
- $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é o incremento da variável dependente.

Quociente de Newton: Coeficiente angular da reta secante

Quando $x = x_1$, a variação média

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

representa o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $f(x)$ passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$.



Quociente de Newton: Coeficiente angular da reta secante

A equação da reta secante $s(x)$ ao gráfico de $f(x)$ passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ é dada por

$$s(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Quociente de Newton: Coeficiente angular da reta secante

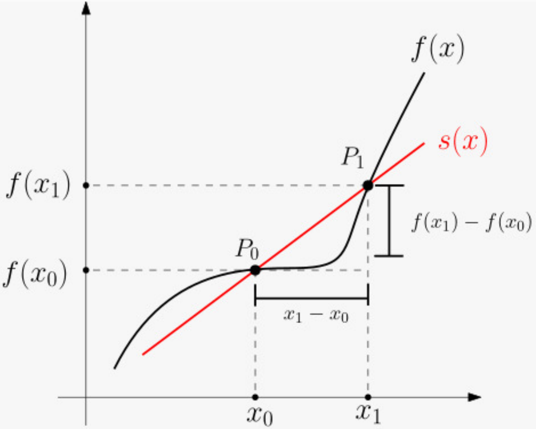
Observação

- *A inclinação da reta secante* $s(x)$ *ao gráfico de* $f(x)$ *passando pelos pontos* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *e* $P_1 = (x_1, f(x_1))$ *é*

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

- $s(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_0 - x_0) + f(x_0) = f(x_0).$
- $s(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + f(x_0) = f(x_1).$

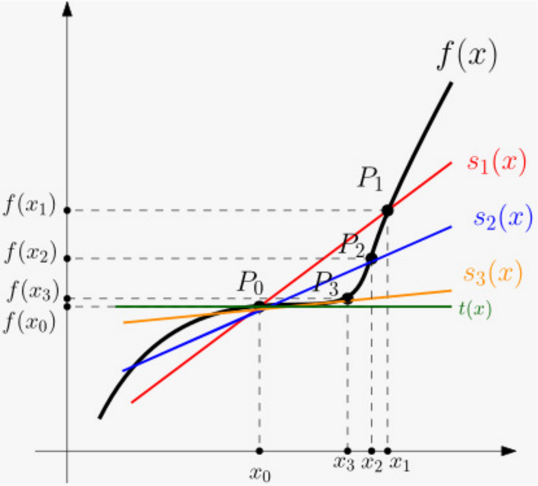
Equação da reta tangente



- Agora estudamos o comportamento do quociente de Newton $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando $\Delta x \to 0$ ($x \to x_0$).

Equação da reta tangente

- Quando $\Delta x \to 0$ o ponto $(x, f(x))$ tende ao ponto $(x_0, f(x_0))$, e
- A reta secante terá como posição limite a reta tangente à curva $f(x)$ passando por $(x_0, f(x_0))$.



Equação da reta tangente

Definição

Seja f uma função diferenciável em x_0. A equação da reta tangente à curva $f(x)$ que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada pela formula

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Equação da reta tangente

Observação

- $$\begin{aligned} t(x_0) &= f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

- $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Equação da reta tangente: Exemplo

- Calcular a equação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt{x}$ que passa pelo ponto $(4, 2)$.
- A equação desta reta tangente é

$$t(x) = f'(4)(x-4) + f(4).$$

- Sendo que $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Então, $f'(4) = 1/2\sqrt{4} = 1/4$. Sendo que $f(4) = 2$ concluimos que

$$t(x) = 1/4(x-4) + 2 = 1/4\,x + 1.$$

Funções de uma Variável

Derivada das funções clássicas

Cristian F. Coletti

16 de agosto de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC

- □ Derivada de x^n

  Generalização: Derivada de x^α

- □ Derivada de $\frac{1}{x^n}$

- □ Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

- □ Derivada de a^x

- □ Derivada de $\ln(x)$

Derivada de x^n

Derivada de x^n

- Seja $f(x) = x^n, 0 \neq n \in \mathbb{N}$.
- Queremos calcular $f'(c)$, onde $c \in \mathbb{R}$.
- Para calcular $f'(c)$ devemos estudar o quociente $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$.
- Observe que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{(c+h)^n - c^n}{h}. \tag{1}$$

- $(c+h)^n = ? \Rightarrow$ Binômio de Newton.

Derivada de x^n

- O teorema do binômio de Newton nos permite escrever

$$(c+h)^n = c^n + nc^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

- Observe que

$$\begin{aligned} (c+h)^n - c^n &= nc^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}h^2 + \ldots + h^n \\ &= h\left(nc^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}h^{+} \ldots + h^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Derivada de x^n

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^n - c^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(nc^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}h^{+} \ldots + h^{n-1}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nc^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}c^{n-2}h^{+} \ldots + h^{n-1}\right) \\
&= nc^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Derivada de x^n

Conclusão

Se $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$ *e* $0 \neq n \in \mathbb{N}$ *então*

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Derivada de x^α

Seja $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ e seja $0 \neq c \in \text{ Dom }(f)$.

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{(c+h)^\alpha - c^\alpha}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} c^\alpha \frac{(1+h/c)^\alpha - 1}{h} \\
&= c^{\alpha-1} \lim_{h \to 0} \frac{(1+h/c)^\alpha - 1}{h/c} \\
&= c^{\alpha-1} \lim_{y \to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} \quad (y := h/c) \\
&= \alpha c^{\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

Derivada de x^α

No cálculo anterior usamos que

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha.$$

De fato, fazendo $e^z := 1+y$ tem-se que $z \to 0$ quando $y \to 0$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} &= \lim_{z\to 0}\frac{e^{\alpha z}-1}{e^z-1} \\
&= \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{\alpha z}-1}{z}\times\frac{z}{e^z-1}\right) \\
&= \ln(e^\alpha) = \alpha. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Derivada de x^α

Observação

No cálculo anterior usamos que

$$\lim_{z \to 0} \frac{a^z - 1}{z} = \ln(a)$$

com $a = e^\alpha$.

Derivada de x^α

Conclusão

Se $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $0 \neq x \in$ *Dom* (f) *então*

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Derivada de x^α: Exemplos

A função $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$ está definida em $\mathbb{R}$, é diferenciável e o valor da sua derivada é

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' &= \left(x^{5/3}\right)' \\ &= \frac{5}{3}x^{5/3-1} = \frac{5}{3}x^{2/3} \\ &= \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Derivada de x^α: Exemplos

A função $f(x) = \sqrt{x}$ está definida em $(0, \infty)$, é diferenciável em $(0, \infty)$ e o valor da sua derivada é

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{1/2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Derivada de $\frac{1}{x^n}$

Derivada de $1/x^n$

Considere a função $f(x) = 1/x^n$ e seja $c \neq 0$. Para calcular o valor da derivada de f no ponto c devemos estudar o seu quociente de Newton. Veja que

$$\begin{aligned}
\frac{f(c+h)-f(c)}{h} &= \frac{\frac{1}{(c+h)^n}-\frac{1}{c^n}}{h} \\
&= \frac{\frac{c^n-(c+h)^n}{(c+h)^n c^n}}{h} \\
&= -\frac{(c+h)^n-c^n}{h}\,\frac{1}{(c+h)^n c^n}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Derivada de $1/x^n$

Então

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{(c+h)^n - c^n}{h} \frac{1}{(c+h)^n c^n} \\ &= -\frac{nc^{n-1}}{c^n c^n} \\ &= -n\frac{1}{c^{n+1}}. \end{aligned}$$

Derivada de $1/x^n$

Conclusão

Se $f(x) = 1/x^n$ *e* $x \neq 0$ *então*

$$f'(x) = -n\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ então pela identidade trigonométrica para o seno da soma de dois ângulos temos que

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(c+h) - \operatorname{sen}(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(c)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(c) - \operatorname{sen}(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen}(c)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(c) \right) \\
&= \cos(c).
\end{aligned}$$

Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

No cálculo anterior fizemos uso do limite fundamental

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$$

e do fato que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$$

Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

No cálculo anterior fizemos uso do limite fundamental

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$$

e do fato que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$$

A seguir faremos o cálculo desse último limite. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{\cos(h) - 1}{h} \left(\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \right) \\ &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h} \frac{1}{\cos(h) + 1} \end{aligned}$$

Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

Como $\operatorname{sen}^2(h) + \cos^2(h) = 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{-\operatorname{sen}^2(h)}{h} \frac{1}{\cos(h) + 1} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{\cos(h) + 1}
\end{aligned} \tag{6}$$

Passando ao limite temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{\cos(h) + 1} \\
&= 1 \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Derivada de $\operatorname{sen}(x)$

Conclusão

Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *e* $x \in \mathbb{R}$ *então*

$$f'(x) = \cos(x)$$

Exercício Calcule a derivada de $\cos(x)$.

Dica Estude detalhadamente o exemplo anterior.

Derivada de a^x

Derivada de a^x

Considere a função $f(x) = a^x$ com $a > 0$. Se $c \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{c+h} - a^c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^c a^h - a^c}{h} \\ &= a^c \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^c \ln(a). \end{aligned}$$

Observe que fizemos uso do limite fundamental

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$$

Derivada de a^x

De fato, fazendo $y = a^h - 1 (h = \log_a(y+1))$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} \\
&= \lim_{y\to 0} \left(\frac{\log_a(y+1)}{y} \right)^{-1} \\
&= \lim_{y\to 0} \left(\log_a(y+1)^{1/y} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\ln(a)} \right)^{-1} \\
&= \ln(a).
\end{aligned} \tag{7}$$

Derivada de a^x

Conclusão

Se $f(x) = a^x$ *com* $a > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}$, *então*

$$f'(x) = a^x \ln(a).$$

Em particular, se $g(x) = e^x$ *e* $x \in \mathbb{R}$, *então a sua derivada é*

$$g'(x) = e^x$$

já que $\ln(e) = 1$.

Derivada de $\ln(x)$

Derivada de $\ln(x)$

Seja $f(x) = \ln(x)$ e considere $c > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{f(c+h)-f(c)}{h} &= \frac{\ln(c+h)-\ln(c)}{h} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{c+h}{c}\right)}{h} \\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{h}{c}\right)}{h} \\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{h}{c}\right)}{c\frac{h}{c}} \\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{h}{c}\right)^{1/\frac{h}{c}}}{c}
\end{aligned}$$

Derivada de $\ln(x)$

Observação

Fazendo $y = \frac{h}{c}$ *vemos que* $y \to 0$ *quando* $h \to 0$.

Logo

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{c}\right)^{1/\frac{h}{c}}}{c} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)^{1/y}}{c} \\
&= \frac{\ln(e)}{c} = \frac{1}{c}
\end{aligned}
$$

Derivada de $\ln(x)$

Conclusão

Se $f(x) = \ln(x)$ *e* $x > 0$ *então*

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$