

Conjuntos Limitados e Extremos

Cristian Favio Coletti

Terceiro Quadrimestre 2025

Definição Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ admite máximo se existe um elemento $x_M \in A$ tal que

$$x \leq x_M, \quad \text{para todo } x \in A.$$

O elemento x_M (necessariamente único) chama-se o máximo do conjunto A e é denotado com $x_M = \max A$.

O mínimo de um conjunto A , que indicamos com $x_m = \min A$, é definido de modo análogo.

Observamos que se um conjunto admite máximo, ele é limitado superiormente; de fato, o máximo do conjunto é um majorante do conjunto, aliás é fácil ver que é o menor dos seus majorantes.

Todavia, não vale o vice-versa: um conjunto pode ser superiormente limitado sem admitir máximo.

Seja $A = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Observe que 1 é um majorante do conjunto. Entre todos os majorantes de A , 1 é privilegiado: é o menor dos majorantes.

Para nos convenceremos deste fato, mostremos que todo número real $r < 1$ não é um majorante de A : isso significa que existe um inteiro n tal que

$$\frac{n}{n+1} > r.$$

Tal desigualdade equivale a

$$\frac{n+1}{n} < \frac{1}{r},$$

Tal desigualdade equivale a

$$\frac{n+1}{n} < \frac{1}{r},$$

isto é $1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{r}$, vale a dizer $\frac{1}{n} < \frac{1-r}{r}$, ou ainda $n > \frac{r}{1-r}$. A existência de tal n segue então da propriedade Arquimedean.

Tal desigualdade equivale a

$$\frac{n+1}{n} < \frac{1}{r},$$

isto é $1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{r}$, vale a dizer $\frac{1}{n} < \frac{1-r}{r}$, ou ainda $n > \frac{r}{1-r}$. A existência de tal n segue então da propriedade Arquimedean.

Portanto, 1 é o menor dos majorantes de A , mas não é o máximo de A , pois $1 \notin A$: não existe nenhum inteiro n tal que

$$\frac{n}{n+1} = 1.$$

Dizemos que 1 é o extremo superior ou supremo de A de A e escrevemos $1 = \sup A$.

Dizemos que 1 é o extremo superior ou supremo de A e escrevemos $1 = \sup A$.

De modo análogo, se considerarmos o intervalo $I = (0, 2)$, podemos verificar que 2 é o menor dos majorantes de I , mas não pertence a I .

Dizemos que 1 é o extremo superior ou supremo de A e escrevemos $1 = \sup A$.

De modo análogo, se considerarmos o intervalo $I = (0, 2)$, podemos verificar que 2 é o menor dos majorantes de I , mas não pertence a I .

Dizemos portanto que 2 é o extremo superior de I e escrevemos $2 = \sup I$.

Definição: Seja f uma função real, e seja A um subconjunto de $\text{dom } f$. Chamamos **extremo superior de f sobre A (ou em A)** o extremo superior da imagem de A através de f ; pomos portanto

Definição: Seja f uma função real, e seja A um subconjunto de $\text{dom } f$. Chamamos **extremo superior de f sobre A (ou em A)** o extremo superior da imagem de A através de f ; pomos portanto

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Definição: Seja f uma função real, e seja A um subconjunto de $\text{dom } f$. Chamamos **extremo superior de f sobre A (ou em A)** o extremo superior da imagem de A através de f ; pomos portanto

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Dizemos que f é **limitada superiormente sobre A** se o conjunto $f(A)$ é superiormente limitado, isto é se $\sup_{x \in A} f(x) < +\infty$.

Se $\sup_{x \in A} f(x)$ é finito e pertence a $f(A)$, então ele é o máximo deste conjunto.

Tal número é dito o **valor máximo** (ou simplesmente o **máximo**) de f sobre A e indicado com $\max_{x \in A} f(x)$.

Os conceitos de **extremo inferior** e de **mínimo** de f sobre A são definidos de modo análogo. Enfim, f diz-se **limitada sobre** A se o conjunto $f(A)$ é limitado.

Às vezes usam-se as notações mais sintéticas $\sup_A f$, $\max_A f$, etc.

Notamos que o valor máximo $M = \max_A f$ de f sobre o conjunto A é caracterizado pelas seguintes condições:

Notamos que o valor máximo $M = \max_A f$ de f sobre o conjunto A é caracterizado pelas seguintes condições:

i) M é um valor assumido pela função sobre A , isto é

existe $x_M \in A$ tal que $f(x_M) = M$;

Notamos que o valor máximo $M = \max_A f$ de f sobre o conjunto A é caracterizado pelas seguintes condições:

i) M é um valor assumido pela função sobre A , isto é

$$\text{existe } x_M \in A \text{ tal que } f(x_M) = M;$$

ii) M é maior ou igual a qualquer outro valor assumido pela função sobre A , isto é para todo $x \in A$, $f(x) \leq M$.

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^2$ se $x \neq 1$ e $f(1) = \frac{3}{2}$. É fácil verificar que

$$\max_{x \in [0,2]} f(x) = 4, \quad \min_{x \in [0,2]} f(x) = 0, \quad \max_{x \in [1,3]} f(x) = 9, \quad \inf_{x \in [1,3]} f(x) = 1.$$

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^2$ se $x \neq 1$ e $f(1) = \frac{3}{2}$. É fácil verificar que

$$\max_{x \in [0,2]} f(x) = 4, \quad \min_{x \in [0,2]} f(x) = 0, \quad \max_{x \in [1,3]} f(x) = 9, \quad \inf_{x \in [1,3]} f(x) = 1.$$

O valor 1 não é assumido pela função em nenhum ponto do intervalo $[1, 3]$, portanto não existe o mínimo de f sobre tal conjunto. $\square$

Definição Seja $x_0 \in \text{dom } f$. Diz-se que x_0 é **ponto de máximo relativo (ou local) para f** se existe uma vizinhança $I_r(x_0)$ de x_0 tal que

Definição Seja $x_0 \in \text{dom } f$. Diz-se que x_0 é **ponto de máximo relativo (ou local) para f** se existe uma vizinhança $I_r(x_0)$ de x_0 tal que

$$\forall x \in I_r(x_0) \cap \text{dom } f, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Definição Seja $x_0 \in \text{dom } f$. Diz-se que x_0 é **ponto de máximo relativo (ou local) para f** se existe uma vizinhança $I_r(x_0)$ de x_0 tal que

$$\forall x \in I_r(x_0) \cap \text{dom } f, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

onde $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Definição Seja $x_0 \in \text{dom } f$. Diz-se que x_0 é **ponto de máximo relativo (ou local) para f** se existe uma vizinhança $I_r(x_0)$ de x_0 tal que

$$\forall x \in I_r(x_0) \cap \text{dom } f, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

onde $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

O valor $f(x_0)$ diz-se **máximo relativo de f** . Diz-se que x_0 é **ponto de máximo absoluto (ou global) para f** se

$$\forall x \in \text{dom } f, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

O valor $f(x_0)$ diz-se **máximo absoluto de f** . Em todos os casos, o máximo define-se **estrito** se se tem $f(x) < f(x_0)$ para $x \neq x_0$.

O valor $f(x_0)$ diz-se **máximo absoluto de f** . Em todos os casos, o máximo define-se **estrito** se se tem $f(x) < f(x_0)$ para $x \neq x_0$.

As definições de **ponto de mínimo relativo** e **absoluto** obtêm-se das precedentes substituindo o símbolo $\leq$ com $\geq$ nas desigualdades.

O valor $f(x_0)$ diz-se **máximo absoluto de f** . Em todos os casos, o máximo define-se **estrito** se se tem $f(x) < f(x_0)$ para $x \neq x_0$.

As definições de **ponto de mínimo relativo** e **absoluto** obtêm-se das precedentes substituindo o símbolo $\leq$ com $\geq$ nas desigualdades.

Um ponto de mínimo ou de máximo será indicado genericamente como **ponto de extremo** para f .

i) Para a parábola $f(x) = 1 + 2x - x^2 = 2 - (x - 1)^2$, o ponto $x_0 = 1$ é ponto de máximo absoluto estrito. O valor 2 é o máximo absoluto da função. Note-se que a derivada $f'(x) = 2(1 - x)$ se anula no ponto de máximo. Não há pontos de mínimo (nem relativos, nem absolutos).

- i) Para a parábola $f(x) = 1 + 2x - x^2 = 2 - (x - 1)^2$, o ponto $x_0 = 1$ é ponto de máximo absoluto estrito. O valor 2 é o máximo absoluto da função. Note-se que a derivada $f'(x) = 2(1 - x)$ se anula no ponto de máximo. Não há pontos de mínimo (nem relativos, nem absolutos).
- ii) Para a função $g(x) = \arcsin x$, o ponto $x_0 = 1$ é ponto de máximo absoluto estrito, e o valor máximo é $\frac{\pi}{2}$. Ao invés, o ponto $x_1 = -1$ é ponto de mínimo absoluto estrito, com valor mínimo $-\frac{\pi}{2}$. Neste caso, os pontos de extremo de g são pontos de não derivabilidade da função.

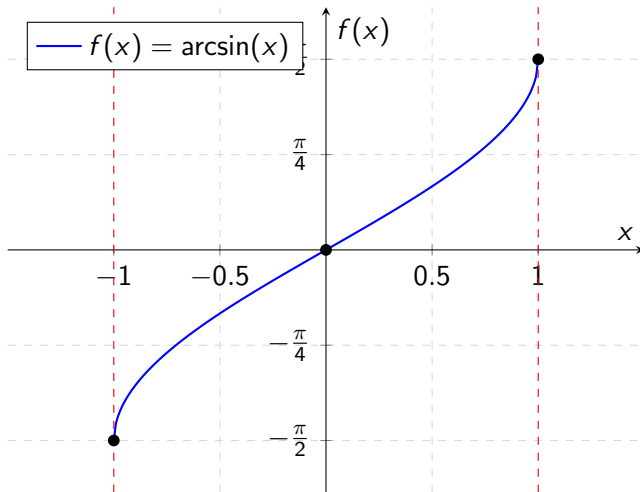


Figura: Gráfico da função $f(x) = \arcsin(x)$.

Estamos interessados em individualizar os pontos de extremo de uma função. A tal fim, se a função é derivável, pode ser útil procurar os pontos em que a derivada se anula.

Definição 6.20 Diz-se ponto crítico (ou estacionário) de uma função f cada ponto x_0 em que f seja derivável e se tenha $f'(x_0) = 0$.

Um ponto crítico é portanto um ponto em que a tangente ao gráfico da função é horizontal.

Teorema (de Fermat)

Teorema: Seja f definida em toda uma vizinhança de um ponto x_0 e derivável em x_0 . Se x_0 é ponto de extremo para f , então

$$f'(x_0) = 0,$$

isto é x_0 é ponto crítico para f .

Demonstração.

- Suponhamos, para fixar as ideias, que x_0 seja um ponto de máximo relativo para f e seja $I_r(x_0)$ uma sua vizinhança tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Demonstração.

- Suponhamos, para fixar as ideias, que x_0 seja um ponto de máximo relativo para f e seja $I_r(x_0)$ uma sua vizinhança tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.
- Nesta vizinhança tem-se portanto $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Demonstração.

- Suponhamos, para fixar as ideias, que x_0 seja um ponto de máximo relativo para f e seja $I_r(x_0)$ uma sua vizinhança tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.
- Nesta vizinhança tem-se portanto $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$.
- Se $x > x_0$, isto é $\Delta x = x - x_0 > 0$, o quociente incremental $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é ≤ 0 .

Demonstração.

- Suponhamos, para fixar as ideias, que x_0 seja um ponto de máximo relativo para f e seja $I_r(x_0)$ uma sua vizinhança tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.
- Nesta vizinhança tem-se portanto $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$.
- Se $x > x_0$, isto é $\Delta x = x - x_0 > 0$, o quociente incremental $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é ≤ 0 .
- Portanto, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Demonstração.

Ao contrário, se $x < x_0$, isto é $\Delta x < 0$, o quociente incremental $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é ≥ 0 ; portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Demonstração.

Tem-se

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

donde $f'(x_0)$ deve ser simultaneamente ≤ 0 e ≥ 0 , e portanto deve ser nula.

De modo análogo se raciocina quando x_0 é ponto de mínimo relativo para f .

- O Teorema de Fermat garante que, para uma função derivável, os pontos de extremo internos ao domínio devem ser procurados entre os pontos críticos da função.

- O Teorema de Fermat garante que, para uma função derivável, os pontos de extremo internos ao domínio devem ser procurados entre os pontos críticos da função.
- Todavia, uma função pode ter pontos críticos que não são pontos de extremo. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ tem a origem como ponto crítico (porque $f'(x) = 3x^2 = 0$ se e só se $x = 0$), mas não tem pontos de extremo sendo estritamente crescente em todo $\mathbb{R}$.

Função Cúbica $f(x) = x^3$

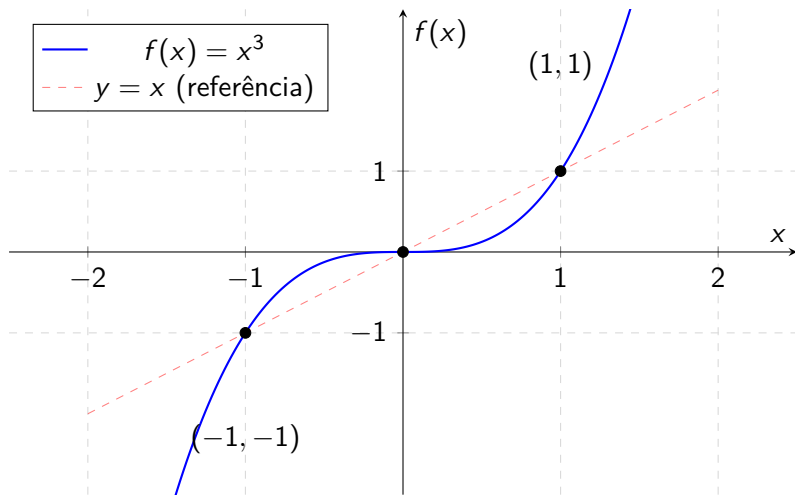


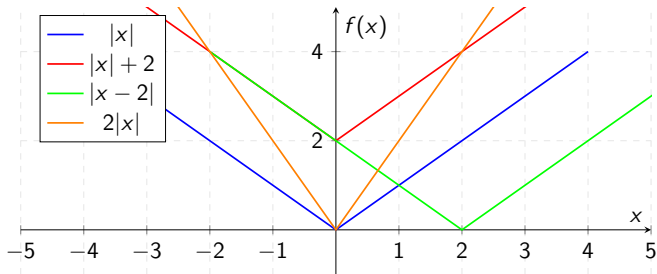
Figura: Gráfico da função cúbica $f(x) = x^3$. Observe o comportamento ímpar da função e o ponto de inflexão na origem.

- Por outro lado, uma função pode ter pontos de extremo que não são pontos críticos; isso acontece quando um ponto de extremo interno ao domínio é ponto de não derivabilidade.

- Por outro lado, uma função pode ter pontos de extremo que não são pontos críticos; isso acontece quando um ponto de extremo interno ao domínio é ponto de não derivabilidade.
- (como por exemplo a função $f(x) = |x|$, que tem o seu mínimo absoluto na origem), ou quando um ponto de extremo não é interno ao domínio.

- Por outro lado, uma função pode ter pontos de extremo que não são pontos críticos; isso acontece quando um ponto de extremo interno ao domínio é ponto de não derivabilidade.
- (como por exemplo a função $f(x) = |x|$, que tem o seu mínimo absoluto na origem), ou quando um ponto de extremo não é interno ao domínio.
- Portanto, para encontrar todos os pontos de extremo de uma função, pode não ser suficiente procurar os pontos críticos da função.

Transformações da Função Módulo



Observação: Resumindo, os pontos de extremo de uma função devem ser procurados entre os pontos do domínio de f que são:

Observação: Resumindo, os pontos de extremo de uma função devem ser procurados entre os pontos do domínio de f que são:

i) ou pontos críticos;

Observação: Resumindo, os pontos de extremo de uma função devem ser procurados entre os pontos do domínio de f que são:

- i) ou pontos críticos;
- ii) ou pontos de não derivabilidade;

Observação: Resumindo, os pontos de extremo de uma função devem ser procurados entre os pontos do domínio de f que são:

- i) ou pontos críticos;
- ii) ou pontos de não derivabilidade;
- iii) ou extremos (em $\mathbb{R}$) do domínio.

Os Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy

Os Teoremas de Rolle e de Lagrange, que agora apresentamos, são de fundamental importância no estudo das funções deriváveis em um intervalo.

Teorema (de Rolle) Seja f uma função definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, contínua em $[a, b]$ e derivável (pelo menos) em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = 0,$$

isto é existe pelo menos um ponto crítico de f em (a, b) .

Demonstração.

O Teorema de Weierstrass assegura que a imagem $f([a, b])$ de f é um intervalo fechado e limitado $[m, M]$, sendo m e M respectivamente o mínimo e o máximo da função no intervalo:

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m),$$

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M),$$

para $x_m, x_M \in [a, b]$.

Demonstração.

O Teorema de Weierstrass assegura que a imagem $f([a, b])$ de f é um intervalo fechado e limitado $[m, M]$, sendo m e M respectivamente o mínimo e o máximo da função no intervalo:

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m),$$

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M),$$

para $x_m, x_M \in [a, b]$.

Se $m = M$, então f é constante em $[a, b]$, portanto $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ e a tese está demonstrada.

Demonstração.

O Teorema de Weierstrass assegura que a imagem $f([a, b])$ de f é um intervalo fechado e limitado $[m, M]$, sendo m e M respectivamente o mínimo e o máximo da função no intervalo:

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m),$$

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M),$$

para $x_m, x_M \in [a, b]$.

Se $m = M$, então f é constante em $[a, b]$, portanto $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ e a tese está demonstrada.

Seja $m < M$. Pois $m \leq f(a) = f(b) \leq M$, uma pelo menos entre as desigualdades estritas $f(a) = f(b) < M$ ou $m < f(a) = f(b)$ deverá ser satisfeita.

Se $f(a) = f(b) < M$, o ponto de máximo absoluto x_M não pode coincidir nem com a nem com b ; portanto, $x_M \in (a, b)$.

Se $f(a) = f(b) < M$, o ponto de máximo absoluto x_M não pode coincidir nem com a nem com b ; portanto, $x_M \in (a, b)$.

Temos portanto encontrado um ponto de extremo para a função f , interno ao domínio e em que f é derivável.

Se $f(a) = f(b) < M$, o ponto de máximo absoluto x_M não pode coincidir nem com a nem com b ; portanto, $x_M \in (a, b)$.

Temos portanto encontrado um ponto de extremo para a função f , interno ao domínio e em que f é derivável.

O Teorema de Fermat garante então que x_M é o ponto crítico x_0 procurado.

Se $f(a) = f(b) < M$, o ponto de máximo absoluto x_M não pode coincidir nem com a nem com b ; portanto, $x_M \in (a, b)$.

Temos portanto encontrado um ponto de extremo para a função f , interno ao domínio e em que f é derivável.

O Teorema de Fermat garante então que x_M é o ponto crítico x_0 procurado.

Se $m < f(a) = f(b)$, demonstra-se com um raciocínio análogo que x_m é o ponto crítico x_0 procurado.

Observação: O teorema assegura a existência de pelo menos um ponto crítico de f em (a, b) . Os pontos críticos podem ser mais de um.

Observação: O teorema assegura a existência de pelo menos um ponto crítico de f em (a, b) . Os pontos críticos podem ser mais de um.

Teorema (de Lagrange ou do valor médio) Seja f uma função definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, contínua em $[a, b]$ e derivável (pelo menos) em (a, b) . Então, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

(6.9)

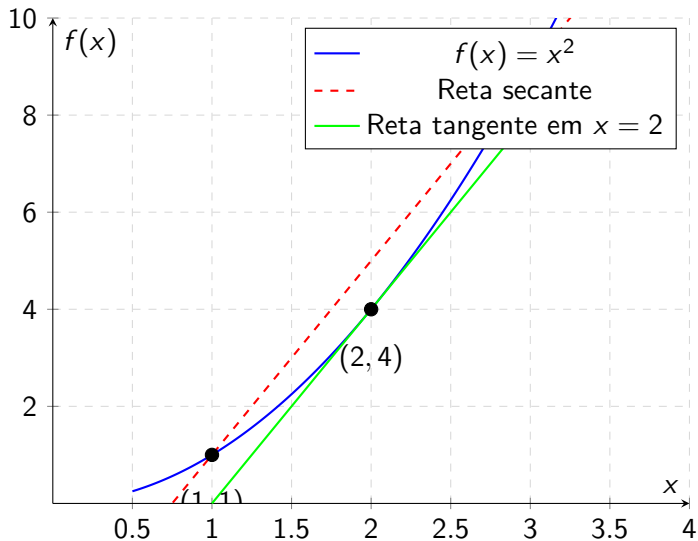
Observação: O teorema assegura a existência de pelo menos um ponto crítico de f em (a, b) . Os pontos críticos podem ser mais de um.

Teorema (de Lagrange ou do valor médio) Seja f uma função definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, contínua em $[a, b]$ e derivável (pelo menos) em (a, b) . Então, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

(6.9)

Cada ponto x_0 que satisfaça tal relação diz-se ponto de Lagrange para f em (a, b) .



Demonstração.

Consideremos a função auxiliar definida em $[a, b]$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ela é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , porque diferença da função f , que por hipótese tem tais propriedades, e de uma função afim, que é contínua e derivável em todo $\mathbb{R}$. Notamos que se tem

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Verifica-se facilmente que

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(a).$$

Portanto, todas as hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas pela função g . Segue-se que existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

que é precisamente a (6.9).

Significado geométrico do Teorema de Lagrange: em cada ponto de Lagrange, a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta secante o gráfico nos pontos de abscissa a e b .

Exemplo

Seja $f(x) = 1 + x + \sqrt{1 - x^2}$, definida no intervalo $[-1, 1]$. Ela é contínua neste intervalo, pois obtida compondo funções elementares contínuas. Além disso, ela é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$ (mas não nos pontos extremos): tem-se de fato

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exemplo

Seja $f(x) = 1 + x + \sqrt{1 - x^2}$, definida no intervalo $[-1, 1]$. Ela é contínua neste intervalo, pois obtida compondo funções elementares contínuas. Além disso, ela é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$ (mas não nos pontos extremos): tem-se de fato

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Portanto, as hipóteses do Teorema de Lagrange são satisfeitas por f , que portanto admite pelo menos um ponto de Lagrange em $(-1, 1)$. A equação (6.9) torna-se

$$1 = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'(x_0) = 1 - \frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}},$$

que é satisfeita por $x_0 = 0$.

Teorema de Cauchy

O seguinte teorema generaliza o Teorema de Lagrange (no sentido que pondo $g(x) = x$ no seu enunciado, recupera-se tal teorema). Ele intervém nas demonstrações do Teorema de de l'Hôpital 6.41 e da fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Teorema de Cauchy

O seguinte teorema generaliza o Teorema de Lagrange (no sentido que pondo $g(x) = x$ no seu enunciado, recupera-se tal teorema). Ele intervém nas demonstrações do Teorema de de l'Hôpital 6.41 e da fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Teorema de Cauchy Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, contínuas em $[a, b]$ e deriváveis (pelo menos) em (a, b) ; suponha-se além disso que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad (6.10)$$

Demonstração.

Observamos primeiramente que $g(a) \neq g(b)$; de fato se assim não fosse, pelo Teorema de Rolle, a função $g'(x)$ se anularia em pelo menos um ponto de (a, b) contra a hipótese. Consideremos agora a função auxiliar definida em $[a, b]$

Demonstração.

Observamos primeiramente que $g(a) \neq g(b)$; de fato se assim não fosse, pelo Teorema de Rolle, a função $g'(x)$ se anularia em pelo menos um ponto de (a, b) contra a hipótese. Consideremos agora a função auxiliar definida em $[a, b]$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Demonstração.

Observamos primeiramente que $g(a) \neq g(b)$; de fato se assim não fosse, pelo Teorema de Rolle, a função $g'(x)$ se anularia em pelo menos um ponto de (a, b) contra a hipótese. Consideremos agora a função auxiliar definida em $[a, b]$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ela é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , porque diferença de duas funções que por hipótese satisfazem tais propriedades. Notamos que se tem

Demonstração.

Observamos primeiramente que $g(a) \neq g(b)$; de fato se assim não fosse, pelo Teorema de Rolle, a função $g'(x)$ se anularia em pelo menos um ponto de (a, b) contra a hipótese. Consideremos agora a função auxiliar definida em $[a, b]$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ela é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , porque diferença de duas funções que por hipótese satisfazem tais propriedades. Notamos que se tem

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Verifica-se facilmente que

$$h(a) = f(a), \quad h(b) = f(a).$$

Verifica-se facilmente que

$$h(a) = f(a), \quad h(b) = f(b).$$

Portanto, todas as hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas pela função h . Segue-se que existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que

Verifica-se facilmente que

$$h(a) = f(a), \quad h(b) = f(a).$$

Portanto, todas as hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas pela função h . Segue-se que existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0,$$

Verifica-se facilmente que

$$h(a) = f(a), \quad h(b) = f(a).$$

Portanto, todas as hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas pela função h . Segue-se que existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0,$$

que é precisamente a (6.10).

Funções de uma variável

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

O Teorema de l'Hôpital

Indicamos com c um dos símbolos $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

O Teorema de l'Hôpital

Indicamos com c um dos símbolos $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

Teorema1 (de l'Hôpital) Sejam f e g duas funções definidas na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , e tais que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L,$$

com $L = 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

O Teorema de l'Hôpital

Indicamos com c um dos símbolos $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

Teorema1 (de l'Hôpital) Sejam f e g duas funções definidas na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , e tais que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L,$$

com $L = 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$. Se f e g são deriváveis na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , com $g' \neq 0$, e se existe (finito ou infinito)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

O Teorema de l'Hôpital

Indicamos com c um dos símbolos $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

Teorema1 (de l'Hôpital) Sejam f e g duas funções definidas na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , e tais que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L,$$

com $L = 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$. Se f e g são deriváveis na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , com $g' \neq 0$, e se existe (finito ou infinito)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então existe também

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.19}$$

O Teorema de l'Hôpital

Indicamos com c um dos símbolos $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

Teorema1 (de l'Hôpital) Sejam f e g duas funções definidas na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , e tais que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L,$$

com $L = 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$. Se f e g são deriváveis na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , com $g' \neq 0$, e se existe (finito ou infinito)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então existe também

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.19}$$

e tal limite é igual ao precedente.

O teorema afirma portanto que, se são verificadas as hipóteses, vale a fórmula

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (6.20)$$

Exemplos Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 5x},$$

que é uma forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$. As funções no numerador e no denominador são deriváveis, e tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{5 \cos 5x} = \frac{4}{5}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 5x} = \frac{4}{5}.$$

ii) Se o quociente $f'(x)/g'(x)$ é ainda uma forma indeterminada, e se f e g são deriváveis duas vezes na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , podemos reiterar a aplicação da fórmula (6.20), estudando o limite do quociente $f''(x)/g''(x)$, e assim por diante.

ii) Se o quociente $f'(x)/g'(x)$ é ainda uma forma indeterminada, e se f e g são deriváveis duas vezes na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , podemos reiterar a aplicação da fórmula (6.20), estudando o limite do quociente $f''(x)/g''(x)$, e assim por diante.

Estudemos a forma indeterminada $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x - \sqrt{(1 + 2x)^3}}{x \sin x}.$$

Derivando numerador e denominador, devemos estudar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\sqrt{1 + 2x}}{\sin x + x \cos x},$$

que é ainda uma forma indeterminada $0/0$.

ii) Se o quociente $f'(x)/g'(x)$ é ainda uma forma indeterminada, e se f e g são deriváveis duas vezes na vizinhança de c , exceto eventualmente em c , podemos reiterar a aplicação da fórmula (6.20), estudando o limite do quociente $f''(x)/g''(x)$, e assim por diante.

Estudemos a forma indeterminada $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x - \sqrt{(1 + 2x)^3}}{x \sin x}.$$

Derivando numerador e denominador, devemos estudar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\sqrt{1 + 2x}}{\sin x + x \cos x},$$

que é ainda uma forma indeterminada $0/0$. Derivando ainda numerador e denominador, chegamos a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x}}{2 \cos x - x \sin x} = -\frac{3}{2}.$$

Dai concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x - \sqrt{(1 + 2x)^3}}{\sin^2 x} = -\frac{3}{2}.$$

Observação O Teorema de l'Hôpital fornece uma condição somente suficiente à existência do limite (6.19). Em outros termos, pode apresentar-se o caso em que não existe o limite do quociente das derivadas mas existe aquele do quociente das funções. Por exemplo, ponhamos $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = 2x + \cos x$. O quociente f'/g' não tem limite para $x \rightarrow +\infty$ como se vê facilmente aplicando o Critério de não existência do limite. Todavia, o limite do quociente f/g existe e vale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{1}{2}.$$

Aplicações do Teorema de l'Hôpital

Vejamos agora como o teorema possa ser utilizado em várias situações.

Límites notáveis

O Teorema de l'Hôpital permite obter os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (6.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0, \quad \forall \alpha > 0 \quad (6.22)$$

já antecipados em (5.6) na forma equivalente mediante os símbolos de Landau. Começemos pelo primeiro limite em (6.21) para $\alpha = 1$. Aplicando (6.20), temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Para qualquer $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{e^{x/\alpha}}{x/\alpha} \right)^\alpha = \frac{1}{\alpha^\alpha} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} \right)^\alpha = +\infty.$$

Enfim, para $\alpha \leq 0$, o resultado é banal pois não se está em presença de uma forma indeterminada. Para o segundo limite em (6.21), temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^\alpha}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^\alpha}{e^{|x|}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^\alpha}{e^y} = 0.$$

Passando aos limites em (6.22), tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x \rightarrow +0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +0^+} x^\alpha = 0.$$

Do teorema de l'Hôpital (supondo por um momento que isso seja lícito), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}.$$

Para $\alpha = 2$ o último limite existe (justificando a aplicação do Teorema de l'Hôpital) e vale $\frac{1}{2}$.

Intervalos de monotonicidade de uma função

Como primeira relevante aplicação dos resultados que acabamos de estabelecer, abordamos o estudo da monotonicidade de uma função.

Teorema Seja I um intervalo e f uma função derivável em I . Valem as seguintes implicações: a) Se f é crescente em I , então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. b1) Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I ; b2) se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente em I .

Corolário Seja f derivável no intervalo I . Seja x_0 um ponto crítico de f interno a I . Se $f'(x)$ é ≥ 0 à esquerda de x_0 e ≤ 0 à direita de x_0 , então x_0 é ponto de máximo para f ; viceversa, se $f'(x)$ é ≤ 0 à esquerda de x_0 e ≥ 0 à direita de x_0 , então x_0 é ponto de mínimo para f .

Observação: O Teorema e o Corolário anterior permitem reconduzir a pesquisa dos pontos de extremo de f e dos seus intervalos de monotonia à pesquisa dos zeros de f' e ao estudo do seu sinal.

Observação: O Teorema e o Corolário anterior permitem reconduzir a pesquisa dos pontos de extremo de f e dos seus intervalos de monotonia à pesquisa dos zeros de f' e ao estudo do seu sinal.

Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{2x}$. Tem-se $f'(x) = (2x + 1)e^{2x}$, portanto $x_0 = -\frac{1}{2}$ é o único ponto crítico de f . Como $f'(x) > 0$ se e somente se $x > -\frac{1}{2}$, e é negativa para $x < -1/2$, deduzimos que x_0 é ponto de mínimo absoluto para f ; a função é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ e é estritamente crescente no intervalo $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

Convexidade e pontos de inflexão

Seja f uma função derivável em um ponto x_0 do seu domínio. Como já feito precedentemente, indicamos com $y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a equação da reta tangente ao gráfico de f em x_0 .

Definição Dizemos que f é convexa em x_0 (ou que tem a concavidade voltada para cima) se existe uma vizinhança $I_r(x_0) \subseteq \text{dom } f$ tal que

$$\forall x \in I_r(x_0), \quad f(x) \geq t(x).$$

Dizemos que f é estritamente convexa se se tem $f(x) > t(x)$ para $x \neq x_0$.

As definições de função côncava (ou tendo concavidade voltada para baixo) e estritamente côncava obtêm-se das precedentes substituindo os símbolos $\geq$ e $>$ respectivamente com $\leq$ e $<$.

Geometricamente, uma função é convexa (respectivamente, côncava) em um ponto se, na vizinhança do ponto, o seu gráfico se encontra acima (respectivamente, abaixo) da reta tangente (veja-se a Figura 6.9).

Exemplo

Verifiquemos que a função $f(x) = x^2$ é estritamente convexa em $x_0 = 1$. A reta tangente ao seu gráfico em tal ponto tem equação

$$t(x) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$

A condição $f(x) > t(x)$ equivale portanto a $x^2 > 2x - 1$, vale a dizer $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$; tal condição é satisfeita por todo $x \neq 1$.

Definição Seja I um intervalo e f uma função derivável em I . A função f diz-se **convexa em I** se é convexa em cada ponto de I .

No estudo das propriedades de convexidade de uma função, os pontos de inflexão, que agora introduzimos, revestem um papel análogo ao dos pontos de extremo no estudo da monotonia.

Definição O ponto x_0 diz-se **ponto de inflexão de f** se existe uma vizinhança $I_r(x_0) \subseteq \text{dom} f$ em que é satisfeita uma das seguintes condições:

$$\forall x \in I_r(x_0),$$
$$\begin{cases} \text{se } x < x_0, & f(x) \leq t(x), \\ \text{se } x > x_0, & f(x) \geq t(x), \end{cases}$$

(no qual caso a inflexão se dirá ascendente); ou

$$\forall x \in I_r(x_0), \quad \begin{cases} \text{se } x < x_0, & f(x) \geq t(x), \\ \text{se } x > x_0, & f(x) \leq t(x), \end{cases}$$

(no qual caso a inflexão se dirá descendente).

Enunciamos agora alguns resultados, que nos permitem estudar a convexidade de uma função e determinar os seus pontos de inflexão.

Teorema Seja I um intervalo e f uma função derivável em I . Valem as seguintes implicações: a) Se f é convexa em I , então f' é crescente em I . b1) Se f' é crescente em I , então f é convexa em I ; b2) se f' é estritamente crescente em I , então f é estritamente convexa em I .

Corolário Seja f derivável duas vezes em I . Valem as seguintes implicações: a) Se f é convexa em I , então $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. b1) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f é convexa em I ; b2) se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente convexa em I .

Corolário Seja f derivável duas vezes em uma vizinhança de x_0 . Valem as seguintes implicações:

a) Se x_0 é ponto de inflexão de f , então $f''(x_0) = 0$.

Corolário Seja f derivável duas vezes em uma vizinhança de x_0 . Valem as seguintes implicações:

- a) Se x_0 é ponto de inflexão de f , então $f''(x_0) = 0$.
- b) Assuma que $f''(x_0) = 0$. Se f'' é de sinal diferente à direita e à esquerda de x_0 , então x_0 é ponto de inflexão para f .

Corolário Seja f derivável duas vezes em uma vizinhança de x_0 . Valem as seguintes implicações:

- a) Se x_0 é ponto de inflexão de f , então $f''(x_0) = 0$.
- b) Assuma que $f''(x_0) = 0$. Se f'' é de sinal diferente à direita e à esquerda de x_0 , então x_0 é ponto de inflexão para f .

Precisamente, a inflexão é ascendente se $f''(x) \leq 0$ à esquerda de x_0 e $f''(x) \geq 0$ à direita de x_0 , descendente na situação oposta.

Corolário Seja f derivável duas vezes em uma vizinhança de x_0 . Valem as seguintes implicações:

- a) Se x_0 é ponto de inflexão de f , então $f''(x_0) = 0$.
- b) Assuma que $f''(x_0) = 0$. Se f'' é de sinal diferente à direita e à esquerda de x_0 , então x_0 é ponto de inflexão para f .

Precisamente, a inflexão é ascendente se $f''(x) \leq 0$ à esquerda de x_0 e $f''(x) \geq 0$ à direita de x_0 , descendente na situação oposta.

Se ao invés f'' não muda sinal à direita e à esquerda de x_0 , então tal ponto não é de inflexão para f .

Preste-se atenção ao fato que a condição $f''(x_0) = 0$ sozinha não é suficiente para garantir que x_0 seja um ponto de inflexão para f . Se por exemplo consideramos a função $f(x) = x^4$, a sua derivada segunda $f''(x) = 12x^2$ se anula em $x_0 = 0$. Todavia, a origem não é ponto de inflexão para f : a tangente ao gráfico de f em x_0 é o eixo das abscissas $y = 0$, e o gráfico de f se encontra sempre acima de tal reta. Note-se que f'' não muda sinal em x_0 .

Exemplo

Para a função $f(x) = xe^{2x}$ tem-se $f''(x) = 4(x + 1)e^{2x}$, que se anula em $x_1 = -1$.

Exemplo

Para a função $f(x) = xe^{2x}$ tem-se $f''(x) = 4(x + 1)e^{2x}$, que se anula em $x_1 = -1$.

Como $f''(x) > 0$ se e somente se $x > -1$, a função f resulta estritamente côncava no intervalo $(-\infty, -1)$ e estritamente convexa no intervalo $(-1, +\infty)$ pois $f''(x) > 0$ nesse 'último intervalo.

Exemplo

Para a função $f(x) = xe^{2x}$ tem-se $f''(x) = 4(x + 1)e^{2x}$, que se anula em $x_1 = -1$.

Como $f''(x) > 0$ se e somente se $x > -1$, a função f resulta estritamente côncava no intervalo $(-\infty, -1)$ e estritamente convexa no intervalo $(-1, +\infty)$ pois $f''(x) > 0$ nesse 'último intervalo.

O ponto $x_1 = -1$ é ponto de inflexão ascendente.