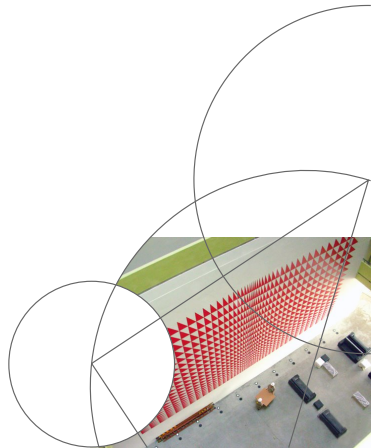




Funções de Uma Variável

Cristian F. Coletti - Sandra Maria Z. Yepes

Universidade Federal do ABC: CMCC



Introdução

No capítulo anterior abordamos o problema: dada uma função $f(x)$, achar a derivada de $f(x)$.

Neste capítulo abordamos o problema inverso: Dada uma função $f(x)$ achar uma função $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x). \quad (2)$$



Primitivas ou Antiderivadas

Definição

Uma função F definida em um intervalo I é denominada uma primitiva (ou antiderivada) de uma outra função f se

$$F'(x) = f(x) \tag{3}$$

para cada $x \in I$.



Exemplo: Achar uma primitiva de $f(x) = x^{39}$. Levando em consideração a regra de derivação da potência propomos como antiderivada da função $f(x)$ a função $F(x) = \frac{x^{40}}{40}$. De fato,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 40 \frac{x^{40-1}}{40} \\ &= x^{39}. \end{aligned}$$

Observação: Observe que se c é uma constante qualquer então $F(x) + c = 40 \frac{x^{40}}{40} + c$ também é uma primitiva de $f(x) = x^{39}$.



Teorema

Se F_1 e F_2 são duas primitivas da função $f(x)$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) = F_2(x) + c$.

Definição

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x) dx.$$

Desta forma, temos que

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

se

$$F'(x) = f(x).$$



Tabela de Integrais

$$\textcircled{1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C.$$

$$\textcircled{3} \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C.$$

$$\textcircled{4} \int \cos(x) dx = \sin(x) + C.$$

$$\textcircled{5} \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C.$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cotan(x) + C.$$



Tabela de Integrais

$$\textcircled{7} \int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + C.$$

$$\textcircled{8} \int \cotan(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + C.$$

$$\textcircled{9} \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\textcircled{10} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C.$$

$$\textcircled{11} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C.$$

$$\textcircled{12} \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$



Tabela de Integrais

$$13 \quad \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right) + C.$$

$$14 \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C.$$

$$15 \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

$$16 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left(\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right) + C.$$



Propriedades

Das propriedades da derivada temos a seguinte propriedade da integral indefinida.

Teorema

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

Também, das propriedades da derivada temos a seguinte propriedade da integral indefinida.

Teorema

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$



Cálculo de Primitivas

Observação: Se $\int f(x) dx = F(x) + c$, então

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c.$$

De fato, isto pode ser comprovado facilmente calculando a derivada da expressão do lado direito na equação acima.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} F(ax) + c \right)' &= \frac{1}{a} F'(ax) (ax)' \\ &= \frac{1}{a} f(ax) a \\ &= f(ax). \end{aligned}$$



Cálculo de Primitivas

Observação: Se $\int f(x) dx = F(x) + c$, então

$$\int f(x + b) dx = F(x + b) + c.$$

Observação: Se $\int f(x) dx = F(x) + c$, então

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

Observação: Recomenda-se não decorar cada um dos casos e sim apoderar-se deles através da exercitação.



Cálculo de Primitivas

Exemplo: Calcule a primitiva de $f(x) = 3x^4 - \sin(x) + 6\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\int 3x^4 - \sin(x) + 6\frac{1}{\sqrt{4x}} dx &= \int 3x^4 - \int \sin(x) + 6 \int \frac{1}{\sqrt{4x}} \\ &= \frac{3}{5}x^5 - (-\cos(x)) + \frac{6 \cdot 2}{4}\sqrt{4x} + c \\ &= \frac{3}{5}x^5 + \cos(x) + 3\sqrt{4x} + c.\end{aligned}$$



Cálculo de Primitivas

Exemplo: Calcule a primitiva de $f(x) = \cos(2x + 1)$.

Resolução:

$$\int \cos(2x + 1) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) + c$$

Exemplo: Calcule a primitiva de $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Resolução:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(|x+1|) + c$$



Método de Substituição

Assuma que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x)$ e que $g(x)$ seja uma função diferenciável. Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$ já que

$$\begin{aligned}(F(g(x)))' &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

Desta forma, se $\int f(x)dx = F(x)$, então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)).$$



Método de Substituição

Escrevendo $u = g(x)$ e notando que $\int f(u) du = F(u)$ temos que

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

A fórmula acima é conhecida como método de Substituição e a enunciamos a seguir.

Método de Substituição: Se f é uma função que tem uma primitiva F e g for uma função diferenciável, então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$

onde

$$u = g(x).$$



Método de Substituição

Exemplo: Calcule $\int (2x + 1) e^{x^2+x-1} dx$.

Seja $u = x^2 + x - 1$. Logo, $\frac{du}{dx} = 2x + 1$. Pelo método de substituição, concluímos que

$$\int (2x + 1) e^{x^2+x-1} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2+x-1} + C.$$



Método de Substituição

Exemplo: Calcule $\int \sqrt{\sin(x)} \cos(x) dx$.

Utilize a substituição $t = \sin(x)$. Logo, $\frac{dt}{dx} = \cos(x)$ e temos que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin(x)} \cos(x) dx &= \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3} \sin^{3/2}(x) + c \end{aligned}$$



Método de Substituição

Exemplo: Calcule $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

Observe que $(1+x^2)' = 2x$. Utilize a substituição $t = 1+x^2$.

Logo, $\frac{dt}{dx} = 2x$ e temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t) + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c\end{aligned}$$



Método de Substituição

Exemplo: Calcule $\int \sin^3(x) dx$.

Observe que $\sin^3(x) = \sin^2(x) \sin(x) = (1 - \cos^2(x)) \sin(x)$.

Utilize a substituição $t = \cos(x)$. Logo, $\frac{dt}{dx} = -\sin(x)$ e temos que

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x) dx &= \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx \\&= -\int (1 - t^2) dt \\&= t - \left(\frac{1}{3}t^3\right) + c \\&= -\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x)\right) + c \\&= \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c.\end{aligned}$$



Integral definida

Nesta parte do curso vamos abordar o problema de encontrar a área sob uma curva. Começamos considerando funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e não negativas.

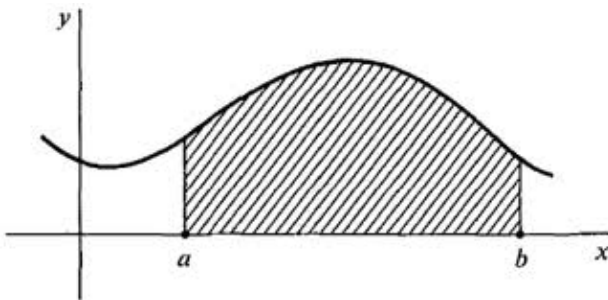


Figure: Área sob a curva.



Aproximação da área

Vamos chamar a região sob a curva de R_f . Resolveremos o problema de encontrar a área sob a curva aproximando a região R_f por uma união de retângulos e, então, aproximamos a área R_f pela soma das áreas destes retângulos.

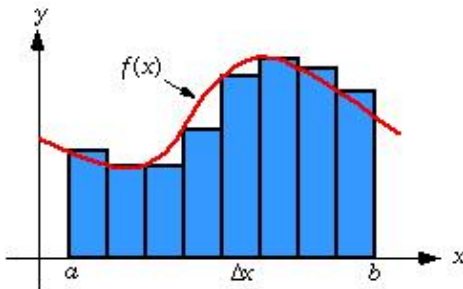


Figure: Aproximação da região sob $f(x)$ por retângulos.



Aproximação da Área

Uma forma simples de obter uma aproximação deste tipo é a seguinte:

- Dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos menores cada um dos quais servirá como base de um retângulo.
- Logo, aproximamos f em cada subintervalo por uma constante apropriada que será a altura do retângulo correspondente.

Por fim, a soma das áreas dos retângulos assim obtidos dá uma aproximação da área da região R_f .



Integral Definida

Somas de Riemann

A seguir damos algumas definições necessárias.

Definição

Uma partição P de um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ formam a bases dos retângulos que aproximam a região R_f . Denotamos por Δx_i ao comprimento deste intervalo. Logo,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$



Integral Definida

Somas de Riemann

Aproximação de f em cada subintervalo: Para aproximar f em cada um destes subintervalos escolhemos um ponto qualquer $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ e utilizamos o valor $f(x_i^*)$ como altura do retângulo cuja base é o subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A área do retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(x_i^*)$ é $f(x_i^*)\Delta x_i$. A soma destas áreas é dada por

$$S_R(f, P) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \quad (4)$$

e é chamada **Soma de Riemann** para f sobre o intervalo $[a, b]$ associada à partição P .



Integral Definida

Observação: Intuitivamente, se acrescentarmos mais pontos à partição P obteríamos uma melhor aproximação da área da região R_f . De fato **esperamos** que, quando $n \rightarrow \infty$, tenha-se que

$$\text{Área}(R_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (5)$$

Para facilitar os cálculos vamos trabalhar com partições do intervalo $[a, b]$ formadas por subintervalos de igual comprimento.



Desta forma, para qualquer partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ deste tipo, qualquer subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tem o mesmo comprimento.

Assim, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Sendo que $x_0 = a$ e que $x_n = b$ temos que

- $x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n}$.
- $x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2\frac{b-a}{n}$.

Assim, pode-se ver que

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$



Teorema

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma sequência de partições do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta_n x = \frac{b-a}{n}$. Então, para qualquer escolha de pontos $x_i^ \in [x_{i-1}, x_i]$ tem-se que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_n x = L.$$

Observação: Note que o limite acima independe da escolha de pontos x_i^* . O valor de L é o que se conhece como integral definida de f entre a e b .



Definição

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma sequência de partições do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta_n x = \frac{b-a}{n}$. Então, para qualquer escolha de pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ a integral definida de f entre a e b , que denotamos por $\int_a^b f(x) dx$, é definida por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_n x.$$



Sendo que o valor de $\int_a^b f(x) dx$ independe da escolha dos pontos x_i^* e que $\Delta_n x = \frac{b-a}{n}$ temos que se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então

- $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}).$
- $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$



Cálculo de Integrais pela Definição.

Cálculo de $\int_a^b x dx$.

Vamos calcular $\int_a^b f(x) dx$ onde $f(x) = x$. Seguindo a definição, consideramos a partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ dada por $x_0 = a, \dots, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b$. Então, temos que

$$\begin{aligned}\int_a^b x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(na + \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^n i \right)\end{aligned}$$



Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(na + \left(\frac{b-a}{n} \right) \frac{n(n+1)}{2} \right) = (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \frac{(b-a)(a+b)}{2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$



Área sob a curva

Vamos ver que a área sob uma determinada curva contínua, não negativa $f(x)$ é dada pela integral da função f entre os pontos a e b .

Sabemos que o valor da integral é dado pelo limite da soma de Riemann e que o limite não depende da escolha de $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Logo,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \Delta_n x \quad (6)$$

onde $m_i := \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.



Da mesma forma,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \Delta_n x$$

onde $M_i := \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

É imediato que se a área de R_f está bem definida então

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta_n x \leq \text{Área}(R_f) \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta_n x.$$

Uma figura pode ajudar a convencer-se deste fato.



De fato, a desigualdade anterior fica evidente na seguinte figura:

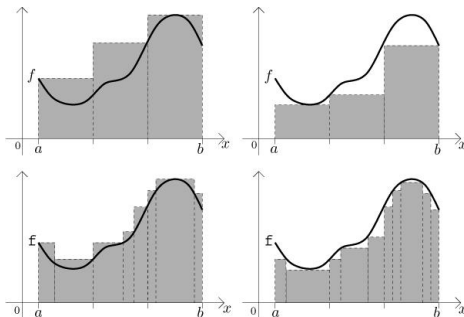


Figure: Aproximação da área da região R_f pela soma das áreas dos retângulos.

Dada a discussão anterior a seguinte definição é natural.



Integral Definida: Área sob a curva

Definição

Assuma que $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua. Então, a área sob a curva $f(x)$, por cima do eixo x e entre as retas $x = a$ e $x = b$ é definida como sendo

$$\text{Área}(R_f) := \int_a^b f(x) dx.$$

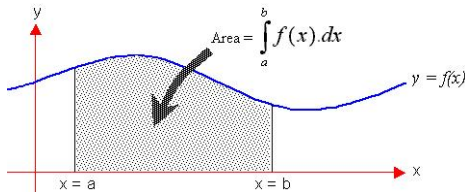


Figure: Área da região R_f .



Propriedades da Integral Definida

Teorema

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$, seja $C \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer e seja $a < m < b$. Então,

1 $\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx.$

2 $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

3 $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ desde que $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

4
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^m f(x) dx + \int_m^b f(x) dx.$$



Área entre duas curvas

Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ então $0 \leq f(x) - g(x)$ é contínua em $[a, b]$.

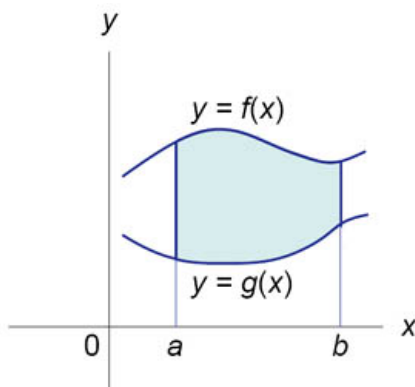


Figure: Área entre duas curvas.



Se $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, então a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta_n x$$

é uma aproximação da área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$.

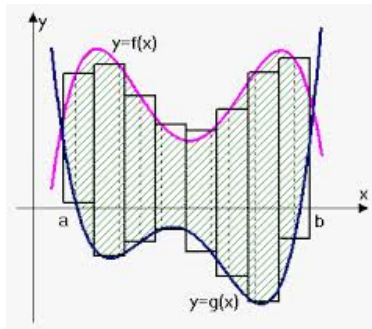


Figure: Aproximação da área entre duas curvas por retângulos.



Como a função $f(x) - g(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite da soma de Riemann acima existe. Agora, como f é não negativa em $[a, b]$ é natural definir a área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $A(f, g)$, como sendo

$$A(f, g) = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$



Aplicações da Integral Definida

Cálculo do trabalho

Na Física há aplicações interessante da integral definida. Calculemos o trabalho exercido por uma força F sobre um corpo desde um ponto a até um ponto b .

Assuma que devido ao efeito de uma força F sobre um corpo, este se desloca desde um ponto a até um ponto b e que a direção da força coincida com a do movimento.

Observação: Se a força for constante, então o trabalho é dado pela seguinte expressão:

$$W = F(b - a).$$



Assuma, agora, que a força F varia continuamente de acordo com a posição do corpo. Agora, dividimos o intervalo $[a, b]$ em

n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual comprimento $\Delta_n x = \frac{b-a}{n}$. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ aproximamos a força F por $F(x_i^*)$ para algum $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Logo,

$$F(x_i^*)\Delta_n x$$

nos dá uma aproximação do trabalho feito pela força F ao longo do caminho entre x_{i-1} e x_i .



Desta forma, a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta_n x \quad (7)$$

nos dá uma aproximação do trabalho da força F ao longo do caminho entre a e b . A força F é contínua, então o limite da soma de Riemann acima existe e define o trabalho da força F ao longo do caminho entre a e b .

Como o limite da soma de Riemann de uma função contínua é dado pela integral definida da função entre os pontos a e b , concluímos que o trabalho exercido pela força F sobre um corpo cuja direção coincida com a direção do movimento é dado por

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$



Método de Integração por Partes

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis. Pela regra de diferenciação do produto sabemos que

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x).g'(x).$$

Desta forma,

$$\int (f'(x)g(x) + f(x).g'(x)) dx = f(x)g(x) + c.$$

Utilizando a linearidade da integral indefinida, temos que



$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x).g'(x)dx + c.$$

A fórmula acima é conhecida como fórmula de integração por partes.

Exemplo: Calcule $\int xe^x dx$. Faça $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$. Logo, $f(x) = e^x$ e $g'(x) = 1$. Então,

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c.\end{aligned}$$

