Estudo e Esboço de Gráficos

Análise Completa de $f(x) = x \cdot e^x$

Cálculo Diferencial

Definição e Domínio

Função de estudo:

$$f(x) = x \cdot e^x$$

Domínio da função:

- x está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.
- e^x está definido e é estritamente positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Interseções com os Eixos

Interseção com o eixo y ($x = 0$):

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \implies (0, 0)$$

Interseção com o eixo x ($f(x) = 0$):

$$x \cdot e^x = 0$$

- Como $e^x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, devemos ter:

$$x = 0$$

A curva intersecta os eixos coordenados exclusivamente na **origem** $(0, 0)$.

Derivada Primeira: Cálculo

Pela **Regra do Produto**:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Definindo $u(x) = x$ e $v(x) = e^x$:

$$f'(x) = (1) \cdot e^x + x \cdot e^x$$
$$f'(x) = (x + 1)e^x$$

Esta expressão é contínua e derivável para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pontos Críticos

Os pontos críticos ocorrem onde $f'(x) = 0$ (ou onde f' não existe).

$$(x+1)e^x = 0$$

Como $e^x > 0$ para todo x:

$$x + 1 = 0 \implies x = -1$$

Portanto, o único ponto crítico é $x = -1$.

Sinal de $f'(x)$ e Monotonicidade

Analisamos o sinal de $f'(x) = (x+1)e^x$, lembrando que $e^x > 0$:

- **Para** $x \in (-\infty, -1)$**:**

$$x + 1 < 0 \implies f'(x) < 0 \quad \text{(Função Estritamente Decrescente)}$$

- **Para** $x \in (-1, +\infty)$**:**

$$x + 1 > 0 \implies f'(x) > 0 \quad \text{(Função Estritamente Crescente)}$$

Classificação do Extremo

Pelo **Teste da Primeira Derivada**:

- $f'(x)$ muda de sinal de negativo para positivo em $x = -1$.
- Logo, $x = -1$ é um ponto de **mínimo local**.

Valor mínimo da função:

$$f(-1) = (-1) \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}368$$

Como a função decresce em $(-\infty, -1)$ e cresce em $(-1, +\infty)$, esse mínimo também é um **mínimo global absoluto**. Não há pontos de máximo.

Derivada Segunda: Cálculo

Derivamos novamente $f'(x) = (x+1)e^x$:

Aplicando a regra do produto com $u(x) = x+1$ e $v(x) = e^x$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(x+1) \cdot e^x + (x+1) \cdot \frac{d}{dx}(e^x)$$
$$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x$$
$$f''(x) = (x+2)e^x$$

Intervalos de Concavidade

Determinamos o sinal de $f''(x) = (x+2)e^x$:

- **Para $x < -2$:**

$$x + 2 < 0 \implies f''(x) < 0 \quad \text{(Concavidade para baixo } \cap\text{)}$$

- **Para $x > -2$:**

$$x + 2 > 0 \implies f''(x) > 0 \quad \text{(Concavidade para cima } \cup\text{)}$$

Ponto de Inflexão

Em $x = -2$, a derivada segunda muda de sinal:

$$f''(-2) = (-2+2)e^{-2} = 0$$

Calculando a imagem correspondente:

$$f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \approx -0{,}271$$

Conclusão: Existe um único ponto de inflexão em:

$$\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$$

Estudo de Assíntotas: Verticais

Assíntotas Verticais:

- Linhas verticais $x = a$ onde $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- A função $f(x) = xe^x$ é o produto de duas funções contínuas em toda a reta real.
- Logo, $f(x)$ não possui singularidades finitas.

Resultado: Não existem assíntotas verticais.

Assíntota Horizontal quando $x \to +\infty$

Calculamos o limite para valores arbitrariamente grandes e positivos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x \cdot e^x)$$

- Como $x \to +\infty$ e $e^x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$$

Portanto, não há assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

Assíntota Horizontal quando $x \to -\infty$

Calculamos o limite no infinito negativo:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \quad \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

Aplicando a **Regra de L'Hôpital**:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x]}{\frac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$$

Resultado: A reta horizontal $y = 0$ (o próprio eixo x) é uma **assíntota horizontal** quando $x \to -\infty$.

Assíntotas Oblíquas

Uma reta $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua se $m = \lim \frac{f(x)}{x}$ for finito e não nulo.

1. Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{(Inexistente)}$$

2. Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Quando $m = 0$, recaímos no caso da assíntota horizontal já obtida ($y = 0$).

Resultado: Não existem assíntotas oblíquas inclinadas ($m \neq 0$).

Resumo do Comportamento

Intervalo / Ponto	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Geometria da Curva**
$(-\infty, -2)$	negativo	$-$	$-$	decrescente, concavidade para baixo
$x = -2$	$-2/e^2 \approx -0{,}27$	$-$	0	**Ponto de Inflexão**
$(-2, -1)$	negativo	$-$	$+$	decrescente, concavidade para cima
$x = -1$	$-1/e \approx -0{,}37$	0	$+$	**Mínimo Absoluto**
$(-1, 0)$	negativo	$+$	$+$	crescente, concavidade para cima
$x = 0$	0	$+$	$+$	**Raiz / Interseção** $(0, 0)$
$(0, +\infty)$	positivo	$+$	$+$	crescente, concavidade para cima

Esboço Gráfico de $f(x) = xe^x$

