Estudo e Esboço de Gráficos

Análise Completa da Função Racional $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 3}$

Cálculo Diferencial

Definição e Domínio

Função em estudo:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$$

Condição de existência:

- O denominador não pode ser nulo:

$$x - 3 \neq 0 \implies x \neq 3$$

Domínio:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

Interseções com os Eixos Coordenados

Interseção com o eixo y ($x = 0$):

$$f(0) = \frac{0^2 - 0 + 1}{0 - 3} = -\frac{1}{3} \implies \left(0, -\frac{1}{3}\right)$$

Interseção com o eixo x ($f(x) = 0$):

$$x^2 - x + 1 = 0$$

- Discriminante: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$
- Não há raízes reais.

A curva **não cruza o eixo** x.

Derivada Primeira: Cálculo

Pela **Regra do Quociente**:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

com $u = x^2 - x + 1$ ($u' = 2x - 1$) e $v = x - 3$ ($v' = 1$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x-3) - (x^2 - x + 1)(1)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{(2x^2 - 7x + 3) - (x^2 - x + 1)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x + 2}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Pontos Críticos

Como $(x-3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, os pontos críticos ocorrem onde $f'(x) = 0$:

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

Aplicando a fórmula quadrática:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = 3 \pm \sqrt{7}$$

Valores aproximados:

- $x_1 = 3 - \sqrt{7} \approx 3 - 2{,}646 = 0{,}354$
- $x_2 = 3 + \sqrt{7} \approx 3 + 2{,}646 = 5{,}646$

Sinal de $f'(x)$ e Monotonicidade

O sinal de $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 2}{(x-3)^2}$ depende apenas do numerador $x^2 - 6x + 2$:

- **Crescente ($f'(x) > 0$):**

$$x \in (-\infty, 3 - \sqrt{7}) \quad \text{e} \quad x \in (3 + \sqrt{7}, +\infty)$$

- **Decrescente ($f'(x) < 0$):**

$$x \in (3 - \sqrt{7}, 3) \quad \text{e} \quad x \in (3, 3 + \sqrt{7})$$

Extremos Locais

Pelo **Teste da Primeira Derivada**:

1. **Em** $x = 3 - \sqrt{7}$**:**
   - f' varia de positivo $(+)$ para negativo $(-)$.
   - Ponto de **Máximo Local**:

$$f(3 - \sqrt{7}) = 5 - 2\sqrt{7} \approx -0{,}292$$

2. **Em** $x = 3 + \sqrt{7}$**:**
   - f' varia de negativo $(-)$ para positivo $(+)$.
   - Ponto de **Mínimo Local**:

$$f(3 + \sqrt{7}) = 5 + 2\sqrt{7} \approx 10{,}292$$

Derivada Segunda: Cálculo

Derivamos $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 2}{(x-3)^2}$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+2)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\
&= \frac{2(x-3)\left[(x-3)^2 - (x^2-6x+2)\right]}{(x-3)^4} \\
&= \frac{2\left[(x^2-6x+9) - (x^2-6x+2)\right]}{(x-3)^3} \\
&= \frac{2(7)}{(x-3)^3} = \frac{14}{(x-3)^3}
\end{aligned}
$$

Concavidade e Inflexão

Análise de sinal de $f''(x) = \dfrac{14}{(x-3)^3}$:

- **Para $x < 3$:**

$$(x-3)^3 < 0 \implies f''(x) < 0 \quad \text{(Concavidade para baixo } \cap\text{)}$$

- **Para $x > 3$:**

$$(x-3)^3 > 0 \implies f''(x) > 0 \quad \text{(Concavidade para cima } \cup\text{)}$$

Pontos de Inflexão: Como $14 \neq 0$, $f''(x)$ nunca se anula. Logo, **não existem pontos de inflexão** (em $x = 3$ a função não está definida).

Assíntota Vertical ($x = 3$)

Analisamos os limites laterais no ponto fora do domínio ($x = 3$):

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \frac{3^2 - 3 + 1}{0^-} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \frac{3^2 - 3 + 1}{0^+} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Conclusão: A reta vertical $x = 3$ é uma **assíntota vertical**.

Estudo de Assíntotas Horizontais

Calculamos os limites para $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$$

Conclusão: Como os limites divergem, **não existem assíntotas horizontais**.

Assíntota Oblíqua: Divisão de Polinômios

Como o grau do numerador excede o do denominador em 1, realizamos a divisão euclidiana:

$$x^2 - x + 1 = (x + 2)(x - 3) + 7$$

$$\implies f(x) = (x + 2) + \frac{7}{x - 3}$$

Calculando a aproximação:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{7}{x - 3} = 0$$

Conclusão: A reta $y = x + 2$ é uma **assíntota oblíqua** para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Quadro Resumo do Comportamento

Intervalo / Ponto	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Geometria da Curva**
$(-\infty, 3-\sqrt{7})$	variado	$+$	$-$	Crescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x = 3-\sqrt{7} \approx 0{,}35$	$5-2\sqrt{7} \approx -0{,}29$	0	$-$	**Máximo Local**
$(3-\sqrt{7}, 3)$	negativo	$-$	$-$	Decrescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x = 3$	Indefinido	$\nexists$	$\nexists$	**Assíntota Vertical** ($x = 3$)
$(3, 3+\sqrt{7})$	positivo	$-$	$+$	Decrescente, Côncava para cima ($\cup$)
$x = 3+\sqrt{7} \approx 5{,}65$	$5+2\sqrt{7} \approx 10{,}29$	0	$+$	**Mínimo Local**
$(3+\sqrt{7}, +\infty)$	positivo	$+$	$+$	Crescente, Côncava para cima ($\cup$)

Esboço Gráfico

