Estudo e Esboço de Gráficos

Análise Completa da Função $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

Cálculo Diferencial

Definição e Domínio

Função em estudo:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

Domínio da função:

- x^2 está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.
- e^{-x^2} está definido e é estritamente positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Não há restrições de denominador ou raízes de índice par com termos negativos.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Simetria da Função

Testando $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$$

Conclusão sobre a simetria:

- A função $f(x)$ é **par**.
- O gráfico é simétrico em relação ao **eixo** y.
- Propriedade útil: basta analisar com rigor para $x \geq 0$ e refletir os resultados para $x < 0$.

Interseções com os Eixos

Interseção com o eixo y ($x = 0$):

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0^2} = 0 \implies (0, 0)$$

Interseção com o eixo x ($f(x) = 0$):

$$x^2 e^{-x^2} = 0$$

- Como $e^{-x^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, devemos ter:

$$x^2 = 0 \implies x = 0$$

A curva toca os eixos exclusivamente na **origem** $(0, 0)$ e satisfaz $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Derivada Primeira: Cálculo

Pela **Regra do Produto** combinada com a **Regra da Cadeia**:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^2\right] e^{-x^2} + x^2 \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\right]$$

Como $\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\right] = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) \\ &= 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} \\ &= 2x(1-x^2)e^{-x^2} \end{aligned}$$

Pontos Críticos

Como $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, os pontos críticos são as raízes de $f'(x) = 0$:

$$2x(1 - x^2)e^{-x^2} = 0$$

Dado que $e^{-x^2} > 0$ para todo x:

$$2x(1 - x)(1 + x) = 0$$

Três pontos críticos encontrados:

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1$$

Intervalos de Monotonicidade

O sinal de $f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$ depende apenas do fator polinomial $2x(1-x^2)$:

- **Intervalo** $(-\infty, -1)$**:** $f'(x) > 0 \implies$ **Crescente**
- **Intervalo** $(-1, 0)$**:** $f'(x) < 0 \implies$ **Decrescente**
- **Intervalo** $(0, 1)$**:** $f'(x) > 0 \implies$ **Crescente**
- **Intervalo** $(1, +\infty)$**:** $f'(x) < 0 \implies$ **Decrescente**

Extremos Locais e Globais

Pelo **Teste da Primeira Derivada**:

1. **Em $x = 0$:**
   - f' passa de negativa $(-)$ para positiva $(+)$.
   - **Mínimo Local e Global**: $f(0) = 0$.

2. **Em $x = -1$ e $x = 1$:**
   - f' passa de positiva $(+)$ para negativa $(-)$.
   - **Máximos Locais e Globais**:

$$f(-1) = f(1) = 1^2 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$$

Derivada Segunda: Cálculo

Partindo de $f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$, aplicamos a Regra do Produto:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[2x - 2x^3\right] e^{-x^2} + (2x - 2x^3)\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\right] \\ &= (2 - 6x^2)e^{-x^2} + (2x - 2x^3)(-2xe^{-x^2}) \\ &= \left[(2 - 6x^2) - 4x^2 + 4x^4\right] e^{-x^2} \\ &= (4x^4 - 10x^2 + 2)e^{-x^2} = 2(2x^4 - 5x^2 + 1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

Candidatos a Pontos de Inflexão

Determinamos onde $f''(x) = 0$, resolvendo $2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$:

Fazendo $u = x^2$ ($u \geq 0$):

$$2u^2 - 5u + 1 = 0 \implies u = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Como $\sqrt{17} \approx 4{,}123$, ambas as raízes para u são positivas:

- $u_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 0{,}219 \implies x \approx \pm 0{,}468$
- $u_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 2{,}281 \implies x \approx \pm 1{,}510$

Intervalos de Concavidade

Análise de sinal de $f''(x) = 2(x^2 - u_1)(x^2 - u_2)e^{-x^2}$:

- **Côncava para cima ($\cup$):** onde $f''(x) > 0$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{u_2}) \cup (-\sqrt{u_1}, \sqrt{u_1}) \cup (\sqrt{u_2}, +\infty)$$

- **Côncava para baixo ($\cap$):** onde $f''(x) < 0$

$$x \in (-\sqrt{u_2}, -\sqrt{u_1}) \cup (\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2})$$

Há **4 pontos de inflexão**: $x = \pm\sqrt{u_1} \approx \pm 0{,}47$ e $x = \pm\sqrt{u_2} \approx \pm 1{,}51$.

Estudo de Assíntotas: Verticais

Assíntotas Verticais:

- Ocorrem em retas $x = c$ onde $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.
- A função $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ é o produto de funções contínuas e diferenciáveis em todo $\mathbb{R}$.
- O denominador e^{x^2} nunca se anula.

Conclusão: Não existem assíntotas verticais.

Estudo de Assíntotas: Horizontais

Calculamos os limites nos extremos infinitos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Aplicando a **Regra de L'Hôpital**:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x^2]}{\frac{d}{dx}[e^{x^2}]} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

Conclusão: A reta horizontal $y = 0$ (o eixo x) é uma **assíntota horizontal** tanto para $x \to +\infty$ quanto para $x \to -\infty$.

Estudo de Assíntotas: Oblíquas

Uma reta $y = mx + b$ ($m \neq 0$) é uma assíntota oblíqua se:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{for finito e não nulo.}$$

Calculando para $f(x)$:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

Conclusão: Como $m = 0$, o comportamento assintótico já está integralmente contemplado pela assíntota horizontal $y = 0$. **Não existem assíntotas oblíquas inclinadas**.

Quadro Resumo do Comportamento

Intervalo / Ponto	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Geometria da Curva**
$(-\infty, -1{,}51)$	positivo	$+$	$+$	Crescente, Côncava para cima ($\cup$)
$x \approx -1{,}51$	$\approx 0{,}23$	$+$	0	**Ponto de Inflexão**
$(-1{,}51, -1)$	positivo	$+$	$-$	Crescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x = -1$	$1/e \approx 0{,}37$	0	$-$	**Máximo Global**
$(-1, -0{,}47)$	positivo	$-$	$-$	Decrescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x \approx -0{,}47$	$\approx 0{,}18$	$-$	0	**Ponto de Inflexão**
$(-0{,}47, 0)$	positivo	$-$	$+$	Decrescente, Côncava para cima ($\cup$)
$x = 0$	0	0	$+$	**Mínimo Global** $(0, 0)$
$(0, 0{,}47)$	positivo	$+$	$+$	Crescente, Côncava para cima ($\cup$)
$x \approx 0{,}47$	$\approx 0{,}18$	$+$	0	**Ponto de Inflexão**
$(0{,}47, 1)$	positivo	$+$	$-$	Crescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x = 1$	$1/e \approx 0{,}37$	0	$-$	**Máximo Global**
$(1, 1{,}51)$	positivo	$-$	$-$	Decrescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x \approx 1{,}51$	$\approx 0{,}23$	$-$	0	**Ponto de Inflexão**
$(1{,}51, +\infty)$	positivo	$-$	$+$	Decrescente, Côncava para cima ($\cup$)

Esboço Gráfico

