Estudo e Esboço de Gráficos

Análise Completa da Função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$

Cálculo Diferencial

Definição e Domínio

Função em estudo (Curva Gaussiana com $\sqrt{2\pi}$):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$$

Domínio da função:

- A constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$ é estritamente positiva.
- A exponencial e^{-x^2} está definida para qualquer valor real $x \in \mathbb{R}$.
- Não há polos, divisões por zero ou raízes com restrição de sinal.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Simetria da Função

Testando a imagem do valor oposto $-x$:

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} = f(x)$$

Conclusões sobre a simetria:

- A função é **par**.
- O gráfico apresenta simetria axial perfeita em relação ao **eixo vertical** y.
- Qualquer propriedade geométrica calculada para $x > 0$ possui correspondente simétrico em $-x < 0$.

Interseções com os Eixos

1. **Interseção com o eixo vertical y ($x = 0$):**

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$$

   - Ponto de corte com o eixo das ordenadas: $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

2. **Interseção com o eixo horizontal x ($f(x) = 0$):**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} = 0$$

   - A exponencial é estritamente positiva em toda a reta real ($e^{-x^2} > 0$).
   - **Não existem interseções com o eixo x** ($f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Derivada Primeira: Cálculo

Pela **Regra da Cadeia**, com expoente $u(x) = -x^2 \implies u'(x) = -2x$:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\right] = -2xe^{-x^2}$$

Multiplicando pelo fator constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2x)e^{-x^2} \\ &= -\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,xe^{-x^2} \end{aligned}$$

A derivada primeira existe, é finita e contínua em todo $\mathbb{R}$.

Pontos Críticos

Os pontos críticos são obtidos resolvendo $f'(x) = 0$:

$$-\frac{2x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} = 0$$

- Como $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \neq 0$ e $e^{-x^2} > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$x = 0$$

Conclusão: Existe um único ponto crítico em toda a reta real: $x = 0$.

Intervalos de Monotonicidade

O sinal de $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}$ depende exclusivamente do fator $(-x)$:

- **Para** $x \in (-\infty, 0)$**:**

$$x < 0 \implies -2x > 0 \implies f'(x) > 0 \quad (\textbf{Estritamente Crescente})$$

- **Para** $x \in (0, +\infty)$**:**

$$x > 0 \implies -2x < 0 \implies f'(x) < 0 \quad (\textbf{Estritamente Decrescente})$$

Classificação do Extremo

Pelo **Teste da Primeira Derivada**:

- Em $x = 0$, a derivada $f'(x)$ muda de sinal de positiva $(+)$ para negativa $(-)$.
- Logo, $x = 0$ é um ponto de **máximo local**.

Valor máximo atingido pela função:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$$

Como a função cresce à esquerda de $x = 0$ e decresce à direita, esse ponto é um **máximo global absoluto**. A função não possui pontos de mínimo.

Derivada Segunda: Cálculo

Derivando $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[xe^{-x^2}\right]$ pela **Regra do Produto**:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{d}{dx}(x)\cdot e^{-x^2} + x\cdot\frac{d}{dx}(e^{-x^2})\right] \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[1\cdot e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2})\right] \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(1-2x^2)e^{-x^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(2x^2-1)e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Raízes da Derivada Segunda

Igualando $f''(x) = 0$:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$$

Como a constante e a exponencial são estritamente positivas:

$$2x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{2}$$

Obtemos dois candidatos a pontos de inflexão:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}7071 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx +0{,}7071$$

Intervalos de Concavidade

O sinal de $f''(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ acompanha o sinal do polinômio quadrático $2x^2 - 1$:

- **Côncava para cima ($\cup$):** onde $2x^2 - 1 > 0$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$$

- **Côncava para baixo ($\cap$):** onde $2x^2 - 1 < 0$

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Pontos de Inflexão

Em $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f''(x)$ anula-se e troca efetivamente de sinal.

Calculando as coordenadas y correspondentes:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}2420$$

Dois pontos de inflexão simétricos:

$$I_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right) \quad \text{e} \quad I_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$$

Estudo de Assíntotas: Verticais

Definição: Retas verticais $x = c$ para as quais $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

Análise:

- A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ é infinitamente diferenciável (C^∞) em toda a reta real.
- Não há valores proibidos no domínio, nem polos ou assíntotas em valores finitos.

Conclusão: Não existem assíntotas verticais.

Estudo de Assíntotas: Horizontais

Calculamos os limites para $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = 0$$

Conclusão: A reta horizontal $y = 0$ (o eixo x) é uma **assíntota horizontal bilateral** (para $x \to +\infty$ e para $x \to -\infty$).

Estudo de Assíntotas: Oblíquas

Uma reta $y = mx + b$ ($m \neq 0$) é uma assíntota oblíqua se:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{for finito e não nulo.}$$

Calculando a inclinação assintótica:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0$$

Conclusão: Como $m = 0$, o comportamento no infinito coincide exatamente com a assíntota horizontal já determinada ($y = 0$). **Não existem assíntotas oblíquas inclinadas**.

Quadro Resumo do Comportamento

Intervalo / Ponto	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Geometria da Curva**
$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	> 0	$+$	$+$	Crescente, Côncava para cima ($\cup$)
$x = -1/\sqrt{2}$	$\approx 0{,}242$	$+$	0	**Ponto de Inflexão**
$(-1/\sqrt{2}, 0)$	> 0	$+$	$-$	Crescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x = 0$	$1/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}399$	0	$-$	**Máximo Global Absoluto**
$(0, 1/\sqrt{2})$	> 0	$-$	$-$	Decrescente, Côncava para baixo ($\cap$)
$x = 1/\sqrt{2}$	$\approx 0{,}242$	$-$	0	**Ponto de Inflexão**
$(1/\sqrt{2}, +\infty)$	> 0	$-$	$+$	Decrescente, Côncava para cima ($\cup$)

Esboço Gráfico

