

Integração por Partes - Exemplos

Cristian Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Fórmula da Integração por Partes:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Estratégias importantes:

- Escolha adequada de $f'(x)$ e $g(x)$
- Aplicação múltipla da técnica
- Combinação com outras técnicas de integração

Exemplo 1: Integral com Função Logarítmica

Calcule: $\int x^2 \ln x \, dx$

Solução:

Escolhemos:

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{3}$$

Aplicando a fórmula:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Exemplo 2: Integral com Função Trigonométrica

Calcule: $\int e^x \sin x \, dx$

Solução:

Primeira aplicação:

$$g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^x$$

$$I = \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Segunda aplicação para $\int e^x \cos x \, dx$:

$$g(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\sin x$$

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^x$$

Exemplo 2: Continuação

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \cos x + I\end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\begin{aligned}I &= e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \\ I &= e^x \sin x - e^x \cos x - I \\ 2I &= e^x(\sin x - \cos x) \\ I &= \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

Exemplo 3

Calcule: $\int x^2 e^{3x} dx$

Solução:

Primeira aplicação:

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$f'(x) = e^{3x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

Segunda aplicação para $\int x e^{3x} dx$:

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$f'(x) = e^{3x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Exemplo 3: Continuação

$$\begin{aligned}\int x e^{3x} dx &= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C\end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + C \\ &= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2x}{9} e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C \\ &= \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C\end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcule: $\int x \cos x \, dx$

Solução:

$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Exemplo 5: Integral com Função Inversa

Calcule: $\int \arctan x \, dx$

Solução:

Técnica: considerar a função toda como u

$$g(x) = \arctan x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Para a integral remanescente, usamos substituição:

$$h(x) = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2x$$

Exemplo 5: Continuação

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln|w| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Observação: Esta técnica funciona bem para funções inversas como $\arcsin x$, $\arccos x$, etc.