Números e Sequências

Operações Binárias e Axiomas de Corpo

Cristian F. Coletti

CMCC - Universidade Federal do ABC

Bibliografia básica

1. APOSTOL, Tom Mike. Cálculo I.
2. LAY, Steven R. Analysis: with an introduction to proof.
3. TAO, Terence. Analysis I.
4. ABBOTT, Stephen et al. Understanding analysis.
5. SPIVAK, Michael. Calculus.

Operações binárias

A adição de números inteiros pode ser vista como uma função associando a cada par ordenado (a, b) de números inteiros o número inteiro a + b. A multiplicação tem a mesma descrição abstrata.

Operações binárias

A adição de números inteiros pode ser vista como uma função associando a cada par ordenado (a, b) de números inteiros o número inteiro a + b. A multiplicação tem a mesma descrição abstrata.

Definição

Seja A um conjunto não vazio. Uma **operação binária** em A é uma função:

$$\mu : A \times A \to A$$

Mais geralmente, dados A e B conjuntos não vazios, também chamamos de operação binária em A uma função:

$$\mu : A \times B \to A$$

Se a e b são elementos de A, geralmente escrevemos ab em vez de $\mu(a, b)$.

Se a e b são elementos de A, geralmente escrevemos ab em vez de $\mu(a, b)$.

Expressões como $a \cdot b$, $a + b$ ou $a * b$ são usadas para enfatizar o papel da operação.

Se a e b são elementos de A, geralmente escrevemos ab em vez de $\mu(a, b)$.

Expressões como $a \cdot b$, $a + b$ ou $a * b$ são usadas para enfatizar o papel da operação.

O par ordenado (A, μ) significa um conjunto não vazio equipado com uma operação binária.

Exemplos

Exemplos

1. As operações de adição, multiplicação e subtração são operações binárias em $\mathbb{Z}$

Exemplos

1. As operações de adição, multiplicação e subtração são operações binárias em $\mathbb{Z}$
2. A divisão **não** é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $1 \div 2$ e $1 \div 0$ não são inteiros

Exemplos

1. As operações de adição, multiplicação e subtração são operações binárias em $\mathbb{Z}$
2. A divisão **não** é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $1 \div 2$ e $1 \div 0$ não são inteiros
3. Adição, multiplicação e exponenciação são operações binárias em $\mathbb{Z}^+$

Exemplos

1. As operações de adição, multiplicação e subtração são operações binárias em $\mathbb{Z}$
2. A divisão **não** é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $1 \div 2$ e $1 \div 0$ não são inteiros
3. Adição, multiplicação e exponenciação são operações binárias em $\mathbb{Z}^+$
4. Sejam X conjunto arbitrário e X^X o conjunto de todas as funções $f : X \to X$. A composição $\mu(g, f) = g \circ f$ é operação binária

Exemplos

1. As operações de adição, multiplicação e subtração são operações binárias em $\mathbb{Z}$
2. A divisão **não** é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois $1 \div 2$ e $1 \div 0$ não são inteiros
3. Adição, multiplicação e exponenciação são operações binárias em $\mathbb{Z}^+$
4. Sejam X conjunto arbitrário e X^X o conjunto de todas as funções $f : X \to X$. A composição $\mu(g, f) = g \circ f$ é operação binária
5. O operador de interseção define operação binária em $\wp(X)$ (conjunto das partes de X). Idem para união

Tabelas de Cayley

Tabelas de Cayley

Quando A é finito (n elementos), uma operação binária pode ser representada por tabela $n \times n$ (tabela de Cayley).

Quando A é finito (n elementos), uma operação binária pode ser representada por tabela $n \times n$ (tabela de Cayley).

Exemplo

$A = \{P, I\}$ (par, ímpar)

$+$	P	I
P	P	I
I	I	P

Expressa que soma de dois pares ou dois ímpares é par, e par + ímpar é ímpar.

Exemplo

Exemplo

Seja $A = \{a, b, c\}$. As tabelas definem operações binárias:

Exemplo

Seja $A = \{a, b, c\}$. As tabelas definem operações binárias:

μ_1	a	b	c	μ_2	a	b	c	μ_3	a	b	c
a	a	c	b	a	a	b	c	a	a	a	a
b	b	a	c	b	b	c	a	b	a	b	c
c	c	b	a	c	c	a	b	c	a	c	b

Exemplo

Seja $A = \{a, b, c\}$. As tabelas definem operações binárias:

μ_1	a	b	c	μ_2	a	b	c	μ_3	a	b	c
a	a	c	b	a	a	b	c	a	a	a	a
b	b	a	c	b	b	c	a	b	a	b	c
c	c	b	a	c	c	a	b	c	a	c	b

Temos:

- $\mu_1(b, a) = b$ (segunda linha, primeira coluna)

Exemplo

Seja $A = \{a, b, c\}$. As tabelas definem operações binárias:

μ_1	a	b	c	μ_2	a	b	c	μ_3	a	b	c
a	a	c	b	a	a	b	c	a	a	a	a
b	b	a	c	b	b	c	a	b	a	b	c
c	c	b	a	c	c	a	b	c	a	c	b

Temos:

- $\mu_1(b, a) = b$ (segunda linha, primeira coluna)
- $\mu_1(a, b) = c$, $\mu_2(a, b) = b$, $\mu_3(a, b) = a$ (primeira linha, segunda coluna)

Associatividade

Associatividade

Uma expressão *abc* pode significar:

$$(ab)c = \mu(\mu(a,b),c) \quad \text{ou} \quad a(bc) = \mu(a,\mu(b,c))$$

Associatividade

Uma expressão abc pode significar:

$$(ab)c = \mu(\mu(a,b),c) \quad \text{ou} \quad a(bc) = \mu(a,\mu(b,c))$$

Para μ_1 do Exemplo anterior

$$(ba)c = bc = c, \quad b(ac) = bb = a$$

Associatividade

Uma expressão *abc* pode significar:

$$(ab)c = \mu(\mu(a, b), c) \quad \text{ou} \quad a(bc) = \mu(a, \mu(b, c))$$

Para μ_1 do Exemplo anterior

$$(ba)c = bc = c, \quad b(ac) = bb = a$$

Definição

Uma operação binária μ em A é **associativa** se:

$$a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in A$$

Exemplos

Exemplos

1. Adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Exemplos

1. Adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. Subtração em $\mathbb{C}$ não é associativa: se $c \neq 0$, $(a-b)-c \neq a-(b-c)$

Exemplos

1. Adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. Subtração em $\mathbb{C}$ não é associativa: se $c \neq 0$, $(a - b) - c \neq a - (b - c)$
3. Potenciação em $\mathbb{R}$ não é associativa

Exemplos

1. Adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. Subtração em $\mathbb{C}$ não é associativa: se $c \neq 0$, $(a - b) - c \neq a - (b - c)$
3. Potenciação em $\mathbb{R}$ não é associativa
4. Composição de funções é associativa: para $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = h(g(f(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Exemplos

1. Adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. Subtração em $\mathbb{C}$ não é associativa: se $c \neq 0$, $(a-b)-c \neq a-(b-c)$
3. Potenciação em $\mathbb{R}$ não é associativa
4. Composição de funções é associativa: para $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = h(g(f(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

A propriedade associativa permite escrever produtos de múltiplos elementos sem parênteses: $abcd$.

Elemento neutro

Elemento neutro

Definição

Seja (A, μ) com operação binária. Um elemento $e \in A$ é **elemento neutro** se:

$$ea = ae = a \quad \forall a \in A$$

Elemento neutro

Definição

Seja (A, μ) com operação binária. Um elemento $e \in A$ é **elemento neutro** se:

$$ea = ae = a \quad \forall a \in A$$

Se existe, é único: se e e e' são neutros, então $e = ee' = e'$.

Definição

Seja (A, μ) com operação binária. Um elemento $e \in A$ é **elemento neutro** se:

$$ea = ae = a \quad \forall a \in A$$

Se existe, é único: se e e e' são neutros, então $e = ee' = e'$.

Exemplo

Não há identidade para subtração em $\mathbb{Z}$: não existe e tal que $a - e = e - a = a \; \forall a$.

Elementos inversos

Definição

Seja (A, μ) com elemento neutro e. Se $a \in A$, um elemento $b \in A$ é **inverso** de a se:

$$ab = ba = e$$

Elementos inversos

Definição

Seja (A, μ) com elemento neutro e. Se $a \in A$, um elemento $b \in A$ é **inverso** de a se:

$$ab = ba = e$$

Proposição

Se μ é associativa e tem elemento neutro e, então cada elemento tem no máximo um inverso.

Elementos inversos

Definição

Seja (A, μ) com elemento neutro e. Se $a \in A$, um elemento $b \in A$ é **inverso** de a se:

$$ab = ba = e$$

Proposição

Se μ é associativa e tem elemento neutro e, então cada elemento tem no máximo um inverso.

Demonstração: Se a' e a'' são inversos de a:

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$$

Elementos inversos

Definição

Seja (A, μ) com elemento neutro e. Se $a \in A$, um elemento $b \in A$ é **inverso** de a se:

$$ab = ba = e$$

Proposição

Se μ é associativa e tem elemento neutro e, então cada elemento tem no máximo um inverso.

Demonstração: Se a' e a'' são inversos de a:

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$$

O inverso é denotado a^{-1} ou $-a$ para operações comutativas.

Definição de corpo

Definição de corpo

Definição

Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ com duas operações:

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

satisfazendo:

Definição de corpo

Definição

Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ com duas operações:

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

satisfazendo:

Adição:

1. Comutatividade: $x + y = y + x$
2. Associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Elemento neutro: $\exists 0, x + 0 = x$
4. Oposto: $\forall x, \exists y, x + y = 0$

Definição de corpo

Definição

Um **corpo** é um conjunto $\mathbb{K}$ com duas operações:

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

satisfazendo:

Adição:

1. Comutatividade: $x + y = y + x$
2. Associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Elemento neutro: $\exists 0, x + 0 = x$
4. Oposto: $\forall x, \exists y, x + y = 0$

Multiplicação:

5. Comutatividade: $xy = yx$
6. Associatividade: $x(yz) = (xy)z$
7. Elemento neutro: $\exists 1 \neq 0, 1x = x$
8. Inverso: $\forall x \neq 0, \exists y, xy = 1$

Definição de corpo

Distributividade:

9. $x(y + z) = xy + xz$

Exemplos de corpos

Exemplo

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são corpos com operações usuais ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

Exemplos de corpos

Exemplo

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são corpos com operações usuais ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

Exemplo

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ com

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

é um corpo infinito.

Corpos finitos

Exemplo

Para p primo, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ com adição e multiplicação módulo p é corpo finito de cardinalidade p.

Exemplos não-corpos

Exemplo

$M(2, \mathbb{R})$ (matrizes 2×2) não é corpo porque:

- Multiplicação não é comutativa
- Existem divisores de zero (ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Corpo $\mathbb{Q}(i)$

Exemplo

$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ com

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Corpo $\mathbb{Q}(i)$

Exemplo

$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ com

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Elemento neutro aditivo: $(0, 0)$, neutro multiplicativo: $(1, 0)$.
Com $i = (0, 1)$, temos $z = (x, y) = x + iy$ e $i^2 = -1$.
Inverso de $z = (x, y) \neq 0$

Corpo $\mathbb{Q}(i)$

Exemplo

$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ com

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$
$$(x,y) \cdot (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Elemento neutro aditivo: $(0,0)$, neutro multiplicativo: $(1,0)$.
Com $i = (0,1)$, temos $z = (x,y) = x + iy$ e $i^2 = -1$.
Inverso de $z = (x,y) \neq 0$

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

Corpo de funções racionais

Exemplo

$\mathbb{Q}(t)$: funções racionais $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ (p, q polinômios com coeficientes racionais, $q \not\equiv 0$), identificando $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ se $ps = qr$.
Operações

Corpo de funções racionais

Exemplo

$\mathbb{Q}(t)$: funções racionais $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ (p, q polinômios com coeficientes racionais, $q \neq 0$), identificando $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ se $ps = qr$.
Operações

$$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{fk + hg}{gk}$$
$$\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{k} = \frac{fh}{gk}$$

Tabelas de Cayley para $\mathbb{Z}_5$

Tabela

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Propriedades fundamentais

Proposição

Seja $\mathbb{K}$ um corpo:

1. $\mathbb{K}$ tem pelo menos 2 elementos $(0 \neq 1)$
2. 0 é único elemento neutro aditivo
3. 1 é único elemento neutro multiplicativo
4. $\forall a \in \mathbb{K}, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
5. Oposto é único
6. Inverso é único para $a \neq 0$
7. $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (sem divisores de zero)

Item 2: Se 0 e $0'$ são neutros aditivos:

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

Item 4:

$$a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a1 = a$$

Seja b oposto de a:

$$b + (a + a0) = b + a \Rightarrow (b + a) + a0 = 0 + a0 = a0$$

e

$$b + (a + a0) = (b + a) + a0 = 0 + a0 = a0$$

Logo $a0 = 0$.

Item 5: Se a' e a'' são opostos de a:

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$$

Item 7: Se $ab = 0$ e $a \neq 0$, então existe a^{-1}:

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Teorema do Cancelamento

Teorema

Se $a + b = a + c$ então $b = c$

Teorema do Cancelamento

Teorema

Se $a + b = a + c$ então $b = c$

Demonstração: Pelo Axioma 4, existe y tal que $y + a = 0$. Somando y a ambos os lados:

$$y + (a + b) = y + (a + c)$$

Pela associatividade:

$$(y + a) + b = (y + a) + c$$

Como $y + a = 0$:

$$0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$$

Subtração

Teorema

Dados a e b existe único x tal que $a + x = b$ (denotado $x = b - a$)

Subtração

Teorema

Dados a e b existe único x tal que $a + x = b$ (denotado $x = b - a$)

Demonstração: Seja y tal que $a + y = 0$ (Axioma 4). Defina $x = y + b$. Então:

$$a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$$

Unicidade: Se $a + x = b = a + x'$, então $x = x'$ pelo Teorema anterior.

Definição

$0 - a = -a$ (oposto de a)

Propriedades da subtração

Proposição

1. $b - a = b + (-a)$
2. $-(-a) = a$
3. $a(b - c) = ab - ac$

Demonstração 1: Sejam $x = b - a$, $y = b + (-a)$. Temos:

$$x + a = b$$

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b$$

Logo $x + a = y + a \Rightarrow x = y$.
Demonstração 2: $a + (-a) = 0$ implica que a é oposto de $-a$, ou seja $a = -(-a)$.

Mais teoremas

Teorema

Se $ab = ac$ e $a \neq 0$ então $b = c$

Mais teoremas

Teorema

Se $ab = ac$ e $a \neq 0$ então $b = c$

Teorema

Dados $a \neq 0$ e b, existe único x tal que $ax = b$ (denotado $x = b/a$ ou $\frac{b}{a}$). Em particular $1/a = a^{-1}$.

Mais teoremas

Teorema

Se $ab = ac$ e $a \neq 0$ então $b = c$

Teorema

Dados $a \neq 0$ e b, existe único x tal que $ax = b$ (denotado $x = b/a$ ou $\frac{b}{a}$).
Em particular $1/a = a^{-1}$.

Teorema

1. Se $a \neq 0$, $b/a = b \cdot a^{-1}$
2. $(a^{-1})^{-1} = a$
3. $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $(b, d \neq 0)$
5. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $(b, d \neq 0)$
6. $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$ $(b, c, d \neq 0)$

Números e Sequências

Axiomas de Ordem

Cristian F. Coletti

CMCC- UFABC

Fundamentação conceitual

Estabelecem uma ordenação em um corpo através do conceito primitivo de **positividade**. Permitem determinar relações de desigualdade entre elementos.

Definição (1.26 Corpo ordenado)

Um corpo ordenado é um corpo $\mathbb{K}$ com subconjunto $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$ (números positivos) satisfazendo:

1. **Axioma 10 (Compatibilidade)**: $\forall x, y \in \mathbb{K}^+$, $x + y \in \mathbb{K}^+$ e $xy \in \mathbb{K}^+$
2. **Axioma 11 (Tricotomia)**: $\forall x \neq 0$, exatamente uma: $x \in \mathbb{K}^+$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$
3. **Axioma 12**: $0 \notin \mathbb{K}^+$

Exemplos de Corpos Ordenados

Exemplo ($\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, p \cdot q > 0 \right\}$

Frações onde numerador e denominador têm mesmo sinal. Verifique os axiomas 10, 11 e 12.

Exemplos de Corpos Ordenados

Exemplo ($\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, p \cdot q > 0 \right\}$
Frações onde numerador e denominador têm mesmo sinal. Verifique os axiomas 10, 11 e 12.

Exemplo ($\mathbb{Q}(t)$)

Para $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, defina $r(t) > 0$ quando o coeficiente líder de $p(t)q(t)$ é positivo.

Exemplo: $\frac{t^2-1}{t+3}$ é positivo pois $(t^2 - 1)(t + 3) = t^3 + \cdots$ tem coeficiente líder $1 > 0$.

Corpos Não-Ordenáveis

Exemplo ($\mathbb{Z}_2$)

Não pode ser ordenado pois $1 + 1 = 0$.

Se $1 > 0$ então $1 + 1 > 0$, mas $0 \notin \mathbb{K}^+$, contradição.

Corpos Não-Ordenáveis

Exemplo ($\mathbb{Z}_2$)

Não pode ser ordenado pois $1 + 1 = 0$.
Se $1 > 0$ então $1 + 1 > 0$, mas $0 \notin \mathbb{K}^+$, contradição.

Exemplo ($\mathbb{Q}(i)$)

Não admite ordenação compatível:
$i^2 = -1$. Se $i > 0$ então $i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$
Se $i < 0$ então $-i > 0 \Rightarrow (-i)^2 = i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$
Em ambos casos contradição com $1 > 0$ e $1 + (-1) = 0$.

Definições de Desigualdade

Relações fundamentais

$$
\begin{aligned}
x < y &\iff y - x \in \mathbb{K}^+ \\
y > x &\iff x < y \\
x \leq y &\iff x < y \text{ ou } x = y \\
y \geq x &\iff x \leq y
\end{aligned}
$$

Definições de Desigualdade

Relações fundamentais

$$\begin{aligned}
x < y &\iff y - x \in \mathbb{K}^+ \\
y > x &\iff x < y \\
x \leq y &\iff x < y \text{ ou } x = y \\
y \geq x &\iff x \leq y
\end{aligned}$$

Terminologia

- $x > 0$: **positivo**
- $x < 0$: **negativo** (quando $-x > 0$)
- $x \geq 0$: **não negativo**
- Notação composta: $x < y < z \iff x < y \text{ e } y < z$

Teorema: Propriedades de Ordem

1. **Tricotomia**: $\forall a, b$, exatamente uma: $a < b$, $b < a$, $a = b$
2. **Transitiva**: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
3. **Adição**: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. **Mult. positiva**: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
5. **Quadrado**: $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
6. $1 > 0$
7. **Mult. negativa**: $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
8. **Inversão**: $a < b \Rightarrow -a > -b$
9. **Sinal produto**: $ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
10. **Soma desigualdades**: $a < c \wedge b < d \Rightarrow a + b < c + d$

Demonstrações (Parte 1)

Demonstrações (Parte 1)

1. Tricotomia.

Seja $x = b - a$. Pelo Axioma 11:

- Se $x = 0$: $a = b$
- Se $x \neq 0$: $x > 0$ $(a < b)$ ou $-x > 0$ $(b < a)$, mutuamente exclusivos

$\square$

Demonstrações (Parte 1)

1. Tricotomia.

Seja $x = b - a$. Pelo Axioma 11:

- Se $x = 0$: $a = b$
- Se $x \neq 0$: $x > 0$ $(a < b)$ ou $-x > 0$ $(b < a)$, mutuamente exclusivos

$\square$

2. Transitiva.

Hipóteses: $b - a > 0$, $c - b > 0$

Pelo Axioma 10 (soma): $(b - a) + (c - b) = c - a > 0$

$\therefore a < c$ $\square$

Demonstrações (Parte 1)

1. Tricotomia.

Seja $x = b - a$. Pelo Axioma 11:

- Se $x = 0$: $a = b$
- Se $x \neq 0$: $x > 0$ $(a < b)$ ou $-x > 0$ $(b < a)$, mutuamente exclusivos

$\square$

2. Transitiva.

Hipóteses: $b - a > 0$, $c - b > 0$

Pelo Axioma 10 (soma): $(b - a) + (c - b) = c - a > 0$

$\therefore a < c$

$\square$

3. Adição.

$y - x = (b + c) - (a + c) = b - a > 0$

$\therefore a + c < b + c$

$\square$

Demonstrações (Parte 2)

Demonstrações (Parte 2)

4. Mult. positiva.

Hipóteses: $b - a > 0, \ c > 0$

Pelo Axioma 10 (produto): $(b - a)c > 0$

Mas $(b - a)c = bc - ac$

$\therefore bc - ac > 0 \iff ac < bc$ $\square$

Demonstrações (Parte 2)

4. Mult. positiva.

Hipóteses: $b - a > 0$, $c > 0$

Pelo Axioma 10 (produto): $(b - a)c > 0$

Mas $(b - a)c = bc - ac$

$\therefore bc - ac > 0 \iff ac < bc$ $\square$

5. Quadrado.

Caso $a > 0$: $a \cdot a > 0$ (Axioma 10)

Caso $a < 0$: $-a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) = a^2 > 0$ (Axioma 10) $\square$

Demonstrações (Parte 2)

4. Mult. positiva.

Hipóteses: $b - a > 0$, $c > 0$
Pelo Axioma 10 (produto): $(b - a)c > 0$
Mas $(b - a)c = bc - ac$
$\therefore bc - ac > 0 \iff ac < bc$ $\square$

5. Quadrado.

Caso $a > 0$: $a \cdot a > 0$ (Axioma 10)
Caso $a < 0$: $-a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) = a^2 > 0$ (Axioma 10) $\square$

6. $1 > 0$.

Por (5) com $a = 1 \neq 0$: $1^2 = 1 > 0$ $\square$

Demonstrações (Parte 3)

7. Mult. negativa.

Hipóteses: $b - a > 0$, $c < 0$

Então $-c > 0$

Por (4): $(b - a)(-c) > 0$

Mas $(b - a)(-c) = ac - bc$

$\therefore ac - bc > 0 \iff ac > bc$ $\square$

Demonstrações (Parte 3)

7. Mult. negativa.

Hipóteses: $b - a > 0,\ c < 0$

Então $-c > 0$

Por (4): $(b - a)(-c) > 0$

Mas $(b - a)(-c) = ac - bc$

$\therefore ac - bc > 0 \iff ac > bc$ $\square$

8. Inversão.

$a < b \Rightarrow b - a > 0$

Multiplicando por $-1 < 0$ (pois $1 > 0$):

$(-1)(b - a) < 0$ (por (7))

$\therefore a - b < 0 \iff -a > -b$ $\square$

Formulação equivalente

Os axiomas de positividade podem ser substituídos por

Axiomas Alternativos de Ordem Total

Formulação equivalente

Os axiomas de positividade podem ser substituídos por

1. **Axioma 10'**: $\leq$ é relação de ordem total:
   - Reflexiva: $a \leq a$
   - Anti-simétrica: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
   - Transitiva: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
   - Total: $\forall a, b,\ a \leq b$ ou $b \leq a$

Axiomas Alternativos de Ordem Total

Formulação equivalente

Os axiomas de positividade podem ser substituídos por

1. **Axioma 10'**: $\leq$ é relação de ordem total:
   - Reflexiva: $a \leq a$
   - Anti-simétrica: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
   - Transitiva: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
   - Total: $\forall a, b,\ a \leq b$ ou $b \leq a$
2. **Axioma 11'**: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

Axiomas Alternativos de Ordem Total

Formulação equivalente

Os axiomas de positividade podem ser substituídos por

1. **Axioma 10'**: $\leq$ é relação de ordem total:
   - Reflexiva: $a \leq a$
   - Anti-simétrica: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
   - Transitiva: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
   - Total: $\forall a, b,\ a \leq b$ ou $b \leq a$
2. **Axioma 11'**: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
3. **Axioma 12'**: $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$