

Séries Numéricas

Seção 4.1: Convergência

Introdução Histórica

As séries numéricas, ferramentas fundamentais da matemática, possuem uma história rica e complexa, intimamente ligada à evolução do pensamento matemático e à busca por compreender a natureza do infinito. Desde a antiguidade, métodos como o de exaustão de Arquimedes já exploravam ideias relacionadas, mas foi com o cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz, no século XVII, que as séries numéricas ganharam destaque como ferramentas matemáticas centrais.

No século XVIII, figuras como Euler e Bernoulli expandiram significativamente o campo, investigando a convergência e aplicando as propriedades das séries infinitas em áreas como a teoria dos números e a física. Euler, em particular, desenvolveu métodos para somar séries e estudou sua aplicabilidade em diversos contextos matemáticos.

O século XIX trouxe um rigor maior para a teoria das séries, com matemáticos como Cauchy e Weierstrass formalizando conceitos essenciais de convergência e desenvolvendo critérios precisos para determinar o comportamento das séries. Essa era de rigor matemático foi crucial para resolver paradoxos e incertezas, consolidando as séries numéricas como

4.1 Convergência

Dado (a_n) uma sequência de números reais, podemos construir uma nova sequência a partir dessa, através de somas parciais dos termos dessa sequência:

$$s_1 = a_1 \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

e em geral

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

A sequência (s_n) é denominada **série infinita** ou simplesmente **série**

e é denotada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Os termos de uma série são chamados somas parciais, e assim diremos que $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ é a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

4.1 Exemplos

- ❶ As primeiras somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ são:

$$s_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

- ❷ As primeiras somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ são:

$$s_1 = \frac{1}{2} \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

- ❸ As primeiras somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ são:

$$s_1 = 1 \quad s_2 = 1 + x \quad s_3 = 1 + x + x^2 \quad s_4 = 1 + x + x^2 + x^3$$

4.2 Definição (Convergência de Séries)

Dada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série, e seja $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ a sequência das somas parciais, dizemos que o limite da série é L se a sequência das somas parciais converge a L , ou seja se dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que se $n > M$ então

$$|s_n - L| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - L \right| < \varepsilon.$$

Neste caso L é dito soma da série e a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é dita convergente.

Observação: Apesar de ambíguo, é costume denotar tanto a série infinita como seu limite, caso esse exista, como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Assim como ocorre nas somas finitas, podemos notar que o índice j é uma variável muda. Portanto, se utilizarmos k como outro índice, temos que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j = \sum_{k=0}^{\infty} z_k.$$

Temos também a seguinte definição:

$$\sum_{j=m}^{\infty} z_j \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} z_{j+m}$$

para cada inteiro m onde $z_m, z_{m+1}, \dots$ estão definidos. É evidente que, se $m \leq r$, então:

4.3 Proposição A série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge se e somente se $\sum_{j=m}^{\infty} z_j$ converge. Se uma dessas séries convergirem então vale:

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = \sum_{j=1}^m z_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} z_j.$$

A demonstração dessa proposição será deixada ao leitor. Assim, para verificar que estas séries convergem basta verificar a convergência de apenas uma delas.

4.4 Exemplo

A série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

é um dos exemplos mais simples de série convergente. Vamos provar que ela converge para 1. A soma parcial dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Cada soma parcial finita é igual a:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

e logo

$$|s_n - 1| = \frac{1}{2^n}$$

de modo que s_n tende a 1

4.5 Teorema

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, então $a_k \rightarrow 0$.

Demonstração. Como $a_n = s_n - s_{n-1}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (Por que?), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$$

O que prova que o limite de a_n existe e é 0. $\square$

4.6 Exemplo

Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 7}$$

diverge.

Solução: Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0$$

E portanto, pelo Teorema 4.5 a série diverge.

4.7 Exemplo

A série harmônica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

é uma das séries infinitas mais celebradas da matemática. Como um contra-exemplo, poucas séries ilustram de forma mais clara que a convergência dos termos para zero não é suficiente para garantir a convergência da série. Como série conhecida, apenas algumas poucas são usadas com tanta frequência em comparações.

Ao longo do texto, H_n é usado para denotar a n -ésima soma parcial da série harmônica. Isto é,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prova. Considere a subsequência $(H_{2^k})_{k=0}^{\infty}$

$$H_1 = 1 = 1 + 0 \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)$$

E em geral, podemos mostrar por indução que:

$$H_{2^k} \geq 1 + k \left(\frac{1}{2} \right)$$

Como a subsequência (H_{2^k}) é ilimitada, a sequência (H_n) diverge.

Essa demonstração deve-se a Nicole Oresme e data de cerca de 1350 e ficou perdida por séculos.

4.8 Exemplo

A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3+5}$ diverge.

Pelo teorema anterior uma condição necessária para que a série convirja é que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2n^3+5}$ seja igual a zero. Mas se calcularmos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2n^3+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 5/n^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

vemos que essa condição não é satisfeita, logo a série diverge.

Como vimos, os somatórios finitos possuem as seguintes propriedades:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{propriedade aditiva}) \quad (4-1)$$

$$\sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{propriedade homogênea}). \quad (4-2)$$

O teorema que iremos apresentar a seguir é uma extensão natural dessas propriedades para as séries infinitas convergentes.

4.9 Teorema

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries infinitas convergentes e c e d dois números reais dados, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n)$ também converge, e a sua soma é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (4-3)$$

Demonstração. Tendo em conta as Equações (4-1) e (4-2) podemos escrever

$$\sum_{k=1}^n (ca_k + db_k) = c \sum_{k=1}^n a_k + d \sum_{k=1}^n b_k \quad (4-4)$$

Quando $n \rightarrow \infty$ o primeiro termo do segundo membro de (4-4) tende para $c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e o segundo termo tende para $d \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Portanto o primeiro membro tende para a sua soma, e isso prova que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_k + db_k)$ converge para a soma indicada por (4-3). $\square$

4.10 Teorema

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

Demonstração. Visto que $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, e porque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o Teorema 4.9 diz-nos que a convergência de $\sum (a_n + b_n)$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Deste modo, $\sum (a_n + b_n)$ não pode convergir se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. $\square$

4.11 Exemplo A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$ diverge porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, embora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convirja.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas divergentes, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ pode ou não convergir. Por exemplo quando $a_n = b_n = 1$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge. Mas quando $a_n = 1$ e $b_n = -1$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge.

4.2 Série geométrica

A série geométrica é obtida através da soma dos termos de uma progressão geométrica, i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty} px^{k-1}.$$

Agora, se $x \neq 1$ as somas parciais de uma progressão geométrica podem ser expressas através da formula fechada:

$$\sum_{k=1}^n px^{k-1} = \frac{p - px^n}{1 - x}.$$

No caso $x = 1$ a soma da progressão geométrica se reduz a soma de constantes, e assim

$$\sum_{k=1}^n p = np.$$

Vamos agora calcular a "soma infinita de uma progressão geométrica", ou seja o limite da série geométrica. Começamos observando

que se $x \neq 1$ então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n px^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p - px^n}{1 - x}. \quad (4-5)$$

$$= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x}. \quad (4-6)$$

E deste modo o comportamento de s_n é determinado pelo comportamento de x^n . Como vimos, se $|x| < 1$ então $x^n \rightarrow 0$ e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n px^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p - px^n}{1 - x} = \frac{p}{1 - x}.$$

Se $|x| > 1$ então x^n diverge e logo a série também diverge. No caso $x = 1$ claramente a série diverge.

Assim provamos que:

4.12 Teorema

Dados $p, x \in \mathbb{R}$. Se $|x| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n px^{n-1}$ converge e

$$p + px + px^2 + \cdots + px^{n-1} + \cdots = \frac{p}{1-x}. \quad (4-8)$$

Se $|x| \geq 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n px^{n-1}$ diverge.

Como consequências desse resultado temos:

4.13 Exemplos

- ❶ Se escolhermos o termo inicial como sendo 1 e a razão como sendo x na equação 4.8 temos:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

- ❷ Se escolhermos o termo inicial como sendo 1 e a razão como sendo $-x$ na equação 4.8 temos:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$$

Por fim, Se escolhermos o termo inicial como sendo 1 e a razão como x^2 na equação 4.8 temos:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1$$

4.14 Exemplo

Encontre a soma da série

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \dots$$

Veja que a série anterior é uma série geométrica de termo inicial 3 e razão $-\frac{2}{5}$. Como $|-\frac{2}{5}| < 1$ a série converge e sua soma é:

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \dots = \frac{3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{15}{7}$$

4.3 Série telescópica

A propriedade telescópica de soma (vide exercício 1.8.c) nos diz que:

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_n$$

Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é dita telescópica em relação a sequência b_n se cada termo a_n puder ser expresso como

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

4.15 Exemplo Para a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, temos as somas parciais dadas por

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

e logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge para 1.

O exemplo anterior pode ser generalizado para o seguinte teorema.

4.16 Teorema Dado $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série telescópica em relação a sequência b_n , i.e,

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Então

- ❶ a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e somente se a sequência b_n converge.
- ❷ se a sequência b_n converge a b então

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Demonstração. Seja s_n a soma parcial, então:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} = b_1 - b_{n+1}$$

e assim

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} \right) \\ &= b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = b_1 - b \quad .\end{aligned}$$

4.17 Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{1}{6}$$

Conteçamos observando que

$$\frac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

ou seja a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right)$$

Como $b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Então $b_1 = \frac{1}{6}$ e $b = 0$.

Séries Numéricas

Seções 4.4, 4.5 e 4.6: Convergência Absoluta, Teste da Comparação e Teste do Limite

4.4 Convergência absoluta

Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ possui alguns termos negativos, frequentemente consideramos a série relacionada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, embora o contrário não seja verdade.

4.18 Definição

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (ou é absolutamente convergente).
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente (ou é condicionalmente convergente).

4.19 Teorema

Se uma série converge absolutamente, então ela converge.

Demonstração. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja absolutamente convergente, isto é, que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Pelo critério de Cauchy para séries, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um número natural N tal que $n \geq m \geq N$ implica

$$|a_m| + \cdots + |a_n| < \epsilon.$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$|a_m + \cdots + a_n| \leq |a_m| + \cdots + |a_n| < \epsilon,$$

de modo que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ também converge. $\square$

Quando os termos de uma série são não negativos, convergência e convergência absoluta são equivalentes.

Se $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ são absolutamente convergentes, o mesmo se verifica para a série $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i)$ qualquer que seja a escolha de α e β . Isto é uma consequência imediata da desigualdade triangular e a demonstração será deixada ao leitor.

4.5 Teste da comparação

Consideramos nesta seção apenas séries de termos não negativos, isto é, séries da forma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ onde cada $a_i \geq 0$. Uma vez que as somas parciais de tais séries são monótonas crescentes, pode aplicar-se o Teorema 2.20 para se obter a seguinte condição necessária e suficiente de convergência.

4.5 Teste da comparação

Consideramos nesta seção apenas séries de termos não negativos, isto é, séries da forma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ onde cada $a_i \geq 0$. Uma vez que as somas parciais de tais séries são monótonas crescentes, pode aplicar-se o Teorema 2.20 para se obter a seguinte condição necessária e suficiente de convergência.

4.20 Teorema Se $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge se e somente se a sequência das respectivas somas parciais é limitada superiormente.

4.5 Teste da comparação

Consideramos nesta seção apenas séries de termos não negativos, isto é, séries da forma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ onde cada $a_i \geq 0$. Uma vez que as somas parciais de tais séries são monótonas crescentes, pode aplicar-se o Teorema 2.20 para se obter a seguinte condição necessária e suficiente de convergência.

4.20 Teorema Se $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge se e somente se a sequência das respectivas somas parciais é limitada superiormente.

Se as somas parciais são limitadas superiormente por um número M , por exemplo, a soma da série não pode então exceder M .

4.21 Teorema (Teste da Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries infinitas de termos não negativos. Isto é, $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ para todo n . Então:

- 1 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $0 \leq b_n \leq a_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
- 2 Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demonstração. Como $b_n \geq 0$ para todo n , a sequência (t_n) das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é crescente.

Demonstração. Como $b_n \geq 0$ para todo n , a sequência (t_n) das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é crescente.

Na parte 1, essa sequência é limitada pela soma de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, logo, (t_n) converge pelo teorema da convergência monótona, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Demonstração. Como $b_n \geq 0$ para todo n , a sequência (t_n) das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é crescente.

Na parte 1, essa sequência é limitada pela soma de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, logo, (t_n) converge pelo teorema da convergência monótona, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Na parte 2, (b_n) não pode convergir senão $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ teria que convergir. $\square$

4.22 Exemplo

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

No Exemplo 4.15, vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente, então o Teorema 4.20 implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ também converge.

4.23 Exemplo

Podemos utilizar o Teorema 4.20 para demonstrar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Observamos primeiramente a desigualdade

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

a qual é verdadeira para todo $k \geq 1$, pois $k!$ é formado por $k - 1$ fatores todos eles maiores que 2. E logo temos a convergência.

4.24 Exemplo

Teste a convergência ou divergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Solução: Podemos estudar a convergência da série comparando-a com a série harmônica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geq 3$, e assim:

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \quad n \geq 3.$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Assim, a série dada é divergente pelo Teste da Comparação.

4.6 Teste do limite

Nosso próximo teste para convergência é frequentemente mais fácil de aplicar do que o teste da comparação. Primeiro, entretanto, precisamos de uma nova notação.

4.25 Definição Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos positivos. Dizemos que a_n e b_n são da mesma ordem de magnitude se existir um número positivo L tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Nesse caso, escrevemos $a_n \sim_L b_n$.

4.26 Teorema (Teste do Limite)

Sejam $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ séries de termos positivos. Se $a_n \sim_L b_n$ para algum $L > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

Demonstração. É dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0.$$

Segue da definição de limite existência de um número N_1 tal que $a_n/b_n > L/2$ para todo $n \geq N_1$. Similarmente, existe N_2 tal que $a_n/b_n < L + L/2 = 3L/2$ para todo $n \geq N_2$. Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$ e escolha $n \geq N$. Então:

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$

Logo,

$$a_n < \frac{3Lb_n}{2}.$$

Agora aplicamos o teste da comparação. Suponha que $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ é convergente. Logo a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3Lb_j}{2}$$

também converge, o que implica que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge pelo teste da comparação. Similarmente, se $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge, então $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ também converge. $\square$

4.27 Exemplo

Teste a convergência da série:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}.$$

Solução: Definimos:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{para todo } n > 0.$$

Mostramos que a_n tem a mesma ordem de magnitude de $1/n^2$. Assim, definimos:

$$b_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo } n > 0.$$

Então, temos:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, $a_n \sim b_n$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ converge, segue que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ também converge pelo Teste do Limite.

4.28 Exemplo

Teste a convergência da série:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{j+1} - \sqrt{j} \right)^2.$$

Solução: Para todo $n \geq 0$, definimos:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^2 \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)^2}. \end{aligned}$$

Agora, definimos:

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n > 0.$$

Como:

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{a_n} &= \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}{n} = \frac{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}{n} \\ &= 2 + \frac{1}{n} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 4 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

segue que $a_n \sim \frac{b_n}{4}$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ é a série harmônica divergente, concluímos que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ também diverge pelo Teste do Limite.