

Introdução à topologia da reta

Cristian Coletti

CMCC - UFABC

- O objetivo desta seção é o de introduzir uma linguagem e uma notação que serão úteis, mais adiante, no estudo das sequências e funções reais de uma variável real.

- O objetivo desta seção é o de introduzir uma linguagem e uma notação que serão úteis, mais adiante, no estudo das sequências e funções reais de uma variável real.
- Em boa parte, trata-se de linguagem e notação conhecidas, como é o caso dos intervalos abertos e fechados.

- O objetivo desta seção é o de introduzir uma linguagem e uma notação que serão úteis, mais adiante, no estudo das sequências e funções reais de uma variável real.
- Em boa parte, trata-se de linguagem e notação conhecidas, como é o caso dos intervalos abertos e fechados.
- A expressão "topologia da reta", de certo modo, refere-se a propriedades dos números reais (ou das funções reais) que se expressam nessa linguagem e que permitem definir noções de abertos, fechados, vizinhança, continuidade, limites e outros conceitos fundamentais em análise.

Distância e intervalos

Começamos por dois conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: distância e intervalo.

Distância e intervalos

Começamos por dois conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: distância e intervalo.

A distância entre dois números reais x e y é dada por

Começamos por dois conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: distância e intervalo.

A distância entre dois números reais x e y é dada por

$$d(x, y) := |x - y|$$

Começamos por dois conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: distância e intervalo.

A distância entre dois números reais x e y é dada por

$$d(x, y) := |x - y|$$

Note que, vista na reta real, a noção de distância corresponde ao comprimento do segmento de reta cujos extremos são os pontos com abscissas x e y .

Tipos de intervalos

Dados dois números reais $a < b$, um intervalo de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

Tipos de intervalos

Dados dois números reais $a < b$, um intervalo de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Tipos de intervalos

Dados dois números reais $a < b$, um intervalo de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

A medida de um intervalo de extremos a e b é a distância entre esses extremos, i.e. $|a - b|$. Note que um intervalo de extremos a e b corresponde, na reta real, ao segmento cujos extremos têm abscissas a e b .

Tipos de intervalos

Dados dois números reais $a < b$, um intervalo de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

A medida de um intervalo de extremos a e b é a distância entre esses extremos, i.e. $|a - b|$. Note que um intervalo de extremos a e b corresponde, na reta real, ao segmento cujos extremos têm abscissas a e b . A medida desse intervalo é a medida (comprimento) do segmento correspondente.

Uma notação semelhante àquela de intervalo é usada para denotar semi-retas, lançando mão também dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, tem-se

Uma notação semelhante àquela de intervalo é usada para denotar semi-retas, lançando mão também dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, tem-se

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

Uma notação semelhante àquela de intervalo é usada para denotar semi-retas, lançando mão também dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, tem-se

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

Note que não faz sentido usar o colchete no extremo infinito, uma vez que nem $-\infty$ nem $+\infty$ são números reais. Por simplicidade, às vezes usaremos o termo "intervalo" também para semi-retas como as acima.

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, o intervalo centrado em a com raio ϵ , ou também vizinhança de a de raio ϵ , é o intervalo

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, o intervalo centrado em a com raio ϵ , ou também vizinhança de a de raio ϵ , é o intervalo

$$V_{\epsilon}(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

Nesse caso, dizemos que a é o centro desse intervalo. Observe que vale a seguinte propriedade (prove-a por exercício):

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, o intervalo centrado em a com raio ϵ , ou também vizinhança de a de raio ϵ , é o intervalo

$$V_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

Nesse caso, dizemos que a é o centro desse intervalo. Observe que vale a seguinte propriedade (prove-a por exercício):

$$x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon$$

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, o intervalo centrado em a com raio ϵ , ou também vizinhança de a de raio ϵ , é o intervalo

$$V_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

Nesse caso, dizemos que a é o centro desse intervalo. Observe que vale a seguinte propriedade (prove-a por exercício):

$$x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon$$

Isso significa, em particular, que os números desse intervalo são aqueles que distam de a menos do que ϵ .

Pontos interiores e de fronteira

Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}$, intuitivamente um ponto x em $\mathbb{R}$ pode ser considerado como estando "dentro" de S , na "fronteira" de S , ou "fora" de S .

Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}$, intuitivamente um ponto x em $\mathbb{R}$ pode ser considerado como estando "dentro" de S , na "fronteira" de S , ou "fora" de S .

Definição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Um ponto x em $\mathbb{R}$ é um ponto interior de S se existir uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq S$.

Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}$, intuitivamente um ponto x em $\mathbb{R}$ pode ser considerado como estando "dentro" de S , na "fronteira" de S , ou "fora" de S .

Definição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Um ponto x em $\mathbb{R}$ é um ponto interior de S se existir uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq S$.
- Se para toda vizinhança V de x , temos que $V \cap S \neq \emptyset$ e $V \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$, então x é chamado de ponto de fronteira de S .

Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}$, intuitivamente um ponto x em $\mathbb{R}$ pode ser considerado como estando "dentro" de S , na "fronteira" de S , ou "fora" de S .

Definição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Um ponto x em $\mathbb{R}$ é um ponto interior de S se existir uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq S$.
- Se para toda vizinhança V de x , temos que $V \cap S \neq \emptyset$ e $V \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$, então x é chamado de ponto de fronteira de S .
- O conjunto de todos os pontos interiores de S é denotado por $\text{int}S$, e o conjunto de todos os pontos de fronteira de S é denotado por $\text{fr}S$.

Proposição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então

Proposição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então

- $\text{fr}S = \text{fr}(S^c)$

Proposição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então

- $\text{fr}S = \text{fr}(S^c)$
- Para todo ponto $x \in \mathbb{R}$ temos que x pertence a um e somente um dos seguintes conjuntos: $\text{int } S$, $\text{fr } S$ ou $\text{int } (S^c)$.

Proposição Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então

- $\text{fr}S = \text{fr}(S^c)$
- Para todo ponto $x \in \mathbb{R}$ temos que x pertence a um e somente um dos seguintes conjuntos: $\text{int } S$, $\text{fr } S$ ou $\text{int } (S^c)$.

Exercício: Demonstre a proposição acima.

Conjuntos abertos e fechados

De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em conjunto aberto e conjunto fechado.

Conjuntos abertos e fechados

De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em conjunto aberto e conjunto fechado.

Definição Dizemos que o conjunto A é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in A$ temos que $x \in \text{int}A$.

Conjuntos abertos e fechados

De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em conjunto aberto e conjunto fechado.

Definição Dizemos que o conjunto A é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in A$ temos que $x \in \text{int}A$.

Ou equivalentemente, A é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$

Conjuntos abertos e fechados

De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em conjunto aberto e conjunto fechado.

Definição Dizemos que o conjunto A é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in A$ temos que $x \in \text{int}A$.

Ou equivalentemente, A é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$

Definição Dizemos que o conjunto B é fechado $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus B$ é aberto.

Teorema Seja $S \subseteq \mathbb{R}$.

- 1 Se $\text{fr } S \subseteq S$, então S é fechado.

Teorema Seja $S \subseteq \mathbb{R}$.

- 1 Se $\text{fr } S \subseteq S$, então S é fechado.
- 2 Se $\text{fr } S \subseteq \mathbb{R} \setminus S$, então S é aberto.

Teorema Seja $S \subseteq \mathbb{R}$.

- ① Se $\text{fr } S \subseteq S$, então S é fechado.
- ② Se $\text{fr } S \subseteq \mathbb{R} \setminus S$, então S é aberto.

Teorema

- ① A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Teorema Seja $S \subseteq \mathbb{R}$.

- ① Se $\text{fr } S \subseteq S$, então S é fechado.
- ② Se $\text{fr } S \subseteq \mathbb{R} \setminus S$, então S é aberto.

Teorema

- ① A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- ② A interseção de qualquer coleção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 1)

Demonstração de 1.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 1)

Demonstração de 1.

- Seja uma coleção arbitrária de conjuntos abertos e seja $S = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$.

Demonstração de 1.

- Seja uma coleção arbitrária de conjuntos abertos e seja $S = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$.
- Se $x \in S$, então $x \in A$ para algum $A \in \mathcal{A}$. Como A é aberto existe uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq A$.

Demonstração de 1.

- Seja uma coleção arbitrária de conjuntos abertos e seja $S = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$.
- Se $x \in S$, então $x \in A$ para algum $A \in \mathcal{A}$. Como A é aberto existe uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq A$.
- Mas como $A \subseteq S$, temos que $V \subseteq S$ e, portanto, x é um ponto interior de S . Logo, S é aberto.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 2)

Demonstração de 2.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 2)

Demonstração de 2.

- Sejam $A_1, \dots, A_n$ uma coleção finita de conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Se $T = \emptyset$, já terminamos, pois $\emptyset$ é aberto.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 2)

Demonstração de 2.

- Sejam $A_1, \dots, A_n$ uma coleção finita de conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Se $T = \emptyset$, já terminamos, pois $\emptyset$ é aberto.
- Se $T \neq \emptyset$, seja $x \in T$. Então $x \in A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 2)

Demonstração de 2.

- Sejam $A_1, \dots, A_n$ uma coleção finita de conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Se $T = \emptyset$, já terminamos, pois $\emptyset$ é aberto.
- Se $T \neq \emptyset$, seja $x \in T$. Então $x \in A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- Como cada conjunto A_i é aberto, existem vizinhanças $V_i(x; \epsilon_i)$ de x tais que $V_i(x; \epsilon_i) \subseteq A_i$.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 2)

Demonstração de 2.

- Sejam $A_1, \dots, A_n$ uma coleção finita de conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Se $T = \emptyset$, já terminamos, pois $\emptyset$ é aberto.
- Se $T \neq \emptyset$, seja $x \in T$. Então $x \in A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- Como cada conjunto A_i é aberto, existem vizinhanças $V_i(x; \epsilon_i)$ de x tais que $V_i(x; \epsilon_i) \subseteq A_i$.
- Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Então $V_\epsilon(x) \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, logo $V_\epsilon(x) \subseteq T$.

Demonstração do Teorema anterior (Parte 2)

Demonstração de 2.

- Sejam $A_1, \dots, A_n$ uma coleção finita de conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Se $T = \emptyset$, já terminamos, pois $\emptyset$ é aberto.
- Se $T \neq \emptyset$, seja $x \in T$. Então $x \in A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- Como cada conjunto A_i é aberto, existem vizinhanças $V_i(x; \epsilon_i)$ de x tais que $V_i(x; \epsilon_i) \subseteq A_i$.
- Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Então $V_\epsilon(x) \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, logo $V_\epsilon(x) \subseteq T$.
- Assim, x é um ponto interior de T , e T é aberto.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (1-4)

Exemplos

- 1 Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (1-4)

Exemplos

- 1 Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.
- 2 Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x - a|$, resulta que $(x - r, x + r)$ está contido na semi-reta considerada.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (1-4)

Exemplos

- 1 Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.
- 2 Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x - a|$, resulta que $(x - r, x + r)$ está contido na semi-reta considerada.
- 3 Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado. De fato, seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que é aberto (pois é união de dois conjuntos abertos).

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (1-4)

Exemplos

- 1 Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.
- 2 Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x - a|$, resulta que $(x - r, x + r)$ está contido na semi-reta considerada.
- 3 Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado. De fato, seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que é aberto (pois é união de dois conjuntos abertos).
- 4 Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a]$ ou $[a, +\infty)$ é fechado, pois seus complementares são semi-retas abertas.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (5-9)

- 5 O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (5-9)

- 5 O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
- 6 O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é aberto pois temos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (m, m+1)$.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (5-9)

- 5 O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
- 6 O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é aberto pois temos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (m, m+1)$.
- 7 O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado pois seu complementar é aberto.

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (5-9)

- 5 O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
- 6 O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é aberto pois temos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (m, m+1)$.
- 7 O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado pois seu complementar é aberto.
- 8 Um intervalo do tipo $[a, b)$ não é nem aberto, nem fechado. De fato, nenhum intervalo centrado em a está contido em $[a, b)$ (descartando que este seja aberto) e nenhum intervalo centrado em b está contido no complementar de $[a, b)$ (descartando que $[a, b)$ seja fechado).

Exemplos de conjuntos abertos e fechados (5-9)

- 5 O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
- 6 O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é aberto pois temos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (m, m+1)$.
- 7 O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado pois seu complementar é aberto.
- 8 Um intervalo do tipo $[a, b)$ não é nem aberto, nem fechado. De fato, nenhum intervalo centrado em a está contido em $[a, b)$ (descartando que este seja aberto) e nenhum intervalo centrado em b está contido no complementar de $[a, b)$ (descartando que $[a, b)$ seja fechado).
- 9 De modo análogo, um intervalo do tipo $(a, b]$ não é nem aberto, nem fechado.

Os dois últimos exemplos mostram que os conceitos de "aberto" e "fechado" não são conceitos opostos.

Os dois últimos exemplos mostram que os conceitos de "aberto" e "fechado" não são conceitos opostos.

Isto é, se um dos atributos não vale para um dado conjunto, não se pode concluir que o outro atributo deve ser válido para esse conjunto.

Os dois últimos exemplos mostram que os conceitos de "aberto" e "fechado" não são conceitos opostos.

Isto é, se um dos atributos não vale para um dado conjunto, não se pode concluir que o outro atributo deve ser válido para esse conjunto.

Observação. Sob o ponto de vista formal, convém atribuir ao conjunto vazio a propriedade de ser um conjunto aberto (na verdade, o conjunto vazio satisfaz a condição de ser aberto, acima definida, por vacuidade). Isso significa, também, que o seu complementar é fechado. Mas o complementar de $\emptyset$ é $\mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{R}$ é aberto e também fechado. E sendo $\mathbb{R}$ aberto, temos que seu complementar é fechado, i.e. o conjunto vazio $\emptyset$ também é aberto e fechado. Esses são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados.

Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja S° a união de todos os conjuntos abertos contidos em S . Então:

- 1 S° é um conjunto aberto.
- 2 S° é o maior conjunto aberto contido em S . Ou seja, mostre que $S^\circ \subseteq S$, e se U é qualquer conjunto aberto contido em S , então $U \subseteq S^\circ$.
- 3 $S^\circ = \text{int } S$.

Demonstração do Teorema

1. S° é um conjunto aberto: Por definição, S° é a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em S . A união de conjuntos abertos é sempre um conjunto aberto. Portanto, S° é um conjunto aberto.

Demonstração do Teorema

1. S° é um conjunto aberto: Por definição, S° é a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em S . A união de conjuntos abertos é sempre um conjunto aberto. Portanto, S° é um conjunto aberto.
2. S° é o maior conjunto aberto contido em S : Primeiro, vamos provar que $S^\circ \subseteq S$. Como S° é definido como a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em S , cada um desses conjuntos abertos é um subconjunto de S . Portanto, a união desses conjuntos também será um subconjunto de S . Assim, temos que $S^\circ \subseteq S$.

Demonstração do Teorema (continuação)

Agora, vamos mostrar que se U é um conjunto aberto contido em S , então $U \subseteq S^\circ$: Como S° é a união de todos os conjuntos abertos contidos em S , U é um dos conjuntos abertos que formam essa união. Logo, $U \subseteq S^\circ$. Assim, S° é o maior conjunto aberto contido em S , no sentido de que qualquer conjunto aberto contido em S também está contido em S° .

3. $S^\circ = \text{int}(S)$, onde $\text{int}(S)$ é o conjunto de todos os pontos interiores de S :

Demonstração do Teorema (continuação)

Seja $Y = S^\circ$ a união de todos os subconjuntos abertos de a . assim, $Y \subseteq a$ e Y é um conjunto aberto (pois a união arbitrária de conjuntos abertos é aberta). Logo, se $y \in Y$, então $y \in \text{int}(a)$, uma vez que podemos usar Y como um conjunto aberto contendo y .

Para a recíproca, suponha que $x \in \text{int}(a)$. Então, existe um conjunto aberto $U_x \subseteq a$ que contém x . Esse conjunto U_x está incluído na união que define Y . Portanto, $U_x \subseteq Y$, o que implica que $x \in Y$.

Definição (Ponto de acumulação)

Definição: Seja $A \subset \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que x_0 é um ponto de acumulação de A se, para todo $\delta > 0$, existe pelo menos um ponto $x \in A$, $x \neq x_0$, tal que $|x - x_0| < \delta$. Em outras palavras, x_0 é um ponto de acumulação de A se qualquer vizinhança de x_0 contém infinitos pontos de A distintos de x_0 .

Definição (Ponto de acumulação)

Definição: Seja $A \subset \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que x_0 é um ponto de acumulação de A se, para todo $\delta > 0$, existe pelo menos um ponto $x \in A$, $x \neq x_0$, tal que $|x - x_0| < \delta$. Em outras palavras, x_0 é um ponto de acumulação de A se qualquer vizinhança de x_0 contém infinitos pontos de A distintos de x_0 .

Definição O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A' . Se $x \in A$ e $x \notin A'$, então x é chamado de ponto isolado de A .

Definição (Ponto de acumulação)

Definição: Seja $A \subset \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que x_0 é um ponto de acumulação de A se, para todo $\delta > 0$, existe pelo menos um ponto $x \in A$, $x \neq x_0$, tal que $|x - x_0| < \delta$. Em outras palavras, x_0 é um ponto de acumulação de A se qualquer vizinhança de x_0 contém infinitos pontos de A distintos de x_0 .

Definição O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A' . Se $x \in A$ e $x \notin A'$, então x é chamado de ponto isolado de A .

Observação Essa definição garante que x_0 está "próximo" de outros pontos de A , e é fundamental para definir corretamente limites e continuidade de funções em certos pontos.

Exemplos de pontos de acumulação

- (a) Se A é o intervalo $(0, 1]$, então $A' = [0, 1]$.
- (b) Se $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, então $A' = \{0\}$.
- (c) Se $A = \mathbb{N}$, então $A' = \emptyset$. Assim, $\mathbb{N}$ consiste inteiramente de pontos isolados.
- (d) Se A é um conjunto finito, então $A' = \emptyset$.

Definição (Fecho de um conjunto)

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ o fecho de A , denotado por $\text{cl } A$, é definido por

$$\text{cl } A = A \cup A'$$

onde A' é o conjunto de todos os pontos de acumulação de A .

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então

- a. A é fechado se e somente se A contém todos os seus pontos de acumulação.
- b. $\text{cl } A$ é um conjunto fechado,
- c. A é fechado se e somente se $A = \text{cl } A$,
- d. $\text{cl } A = A \cup \text{fr } A$.

Demonstração da Proposição

1. ($\Rightarrow$) Se A é fechado, então A contém todos os seus pontos de acumulação:

Por definição, um conjunto A é fechado se o seu complemento $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto. Suponha que x seja um ponto de acumulação de A . Isso significa que qualquer vizinhança de x contém pelo menos um ponto de A diferente de x . Se $x \notin A$, então $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Como $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, existe uma vizinhança de x totalmente contida em $\mathbb{R} \setminus A$.

Demonstração da Proposição

1. ($\Rightarrow$) Se A é fechado, então A contém todos os seus pontos de acumulação:

Por definição, um conjunto A é fechado se o seu complemento $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto. Suponha que x seja um ponto de acumulação de A . Isso significa que qualquer vizinhança de x contém pelo menos um ponto de A diferente de x . Se $x \notin A$, então $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Como $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, existe uma vizinhança de x totalmente contida em $\mathbb{R} \setminus A$.

No entanto, isso contradiz o fato de que x é um ponto de acumulação de A , porque essa vizinhança não pode conter nenhum ponto de A . Portanto, x deve estar em A , e assim A contém todos os seus pontos de acumulação.

Demonstração da Proposição (continuação)

($\Leftarrow$) Se A contém todos os seus pontos de acumulação, então A é fechado:
Suponha que A contém todos os seus pontos de acumulação. Precisamos provar que $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto aberto para concluir que A é fechado.

Demonstração da Proposição (continuação)

($\Leftarrow$) Se A contém todos os seus pontos de acumulação, então A é fechado: Suponha que A contém todos os seus pontos de acumulação. Precisamos provar que $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto aberto para concluir que A é fechado.

Considere um ponto $y \in \mathbb{R} \setminus A$. Se $y \notin A$, então y não pode ser um ponto de acumulação de A (caso contrário, y estaria em A porque assumimos que A contém todos os seus pontos de acumulação). Portanto, existe uma vizinhança de y que não contém nenhum ponto de A .

Demonstração da Proposição (continuação)

($\Leftarrow$) Se A contém todos os seus pontos de acumulação, então A é fechado: Suponha que A contém todos os seus pontos de acumulação. Precisamos provar que $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto aberto para concluir que A é fechado.

Considere um ponto $y \in \mathbb{R} \setminus A$. Se $y \notin A$, então y não pode ser um ponto de acumulação de A (caso contrário, y estaria em A porque assumimos que A contém todos os seus pontos de acumulação). Portanto, existe uma vizinhança de y que não contém nenhum ponto de A .

Isso implica que essa vizinhança está totalmente contida em $\mathbb{R} \setminus A$, mostrando que $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto aberto. Como $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, concluímos que A é fechado.

Densidade dos Racionais e Irracionais

Os números reais que não são racionais, ou seja, os elementos do conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, são chamados de números irracionais. Já demonstramos a existência de alguns deles:

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{3},$$

entre outros.

Mostraremos a seguir que os números irracionais estão dispersos por toda parte entre os números reais.

Definição Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém pelo menos um ponto de X .

Em outras palavras, um conjunto X de números reais é denso em $\mathbb{R}$ se, para quaisquer $a < b$ em $\mathbb{R}$, é possível encontrar um $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Teorema Os conjuntos $\mathbb{Q}$ dos números racionais e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.

Demonstração do Teorema

Considere um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Demonstraremos a existência de um número racional e um número irracional nesse intervalo.

Demonstração do Teorema

Considere um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Demonstraremos a existência de um número racional e um número irracional nesse intervalo.

Existência de um número racional. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. A existência de tal p é garantida pela propriedade arquimediana dos reais.

Demonstração do Teorema

Considere um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Demonstraremos a existência de um número racional e um número irracional nesse intervalo.

Existência de um número racional. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. A existência de tal p é garantida pela propriedade arquimediana dos reais.

Os múltiplos inteiros de $\frac{1}{p}$ particionam a reta real em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Como a extensão de um desses intervalos é menor que o comprimento de (a, b) , pelo menos um deles estará contido em (a, b) .

Demonstração do Teorema (continuação)

Formalmente, seja $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m}{p} \geq b\}$. O conjunto A é não vazio e limitado inferiormente, logo possui um menor elemento m_0 . Note que $\frac{m_0}{p} > b$, mas $\frac{m_0-1}{p} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0-1}{p} < b$. De fato, se $a \geq \frac{m_0-1}{p}$, então $a \geq \frac{m_0-1}{p}$ de onde temos que $a \geq b - \frac{1}{p}$ e finalmente $b - a \leq \frac{1}{p}$, contradizendo a escolha de p . Logo, $\frac{m_0-1}{p}$ é um número racional em (a, b) .

Demonstração do Teorema (continuação)

Existência de um número irracional. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Analogamente ao caso anterior, os múltiplos inteiros não nulos de $\frac{\sqrt{2}}{p}$ particionam a reta em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Consequentemente, pelo menos um desses intervalos estará contido em (a, b) . Formalizando, seja $B = \{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \frac{m\sqrt{2}}{p} \geq b\}$. O conjunto B é não vazio e limitado inferiormente, logo possui um menor elemento m_0 . Note que $\frac{m_0\sqrt{2}}{p} \geq b$, mas $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} < b$. Um argumento análogo ao caso anterior mostra que $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ é um número irracional em (a, b) .

Teorema (Princípio dos Intervalos Encaixantes)

Seja $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$. A interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia, ou seja, existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, temos $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$, onde $a = \sup a_n$ e $b = \inf b_n$.

Demonstração do Teorema

Para $n \in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que implica que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Assim, podemos escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Denotemos por A o conjunto dos a_n e por B o conjunto dos b_n . Ambos são limitados: a_1 é uma cota inferior e cada b_n é uma cota superior de A . De maneira semelhante, B também é limitado. Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é uma cota superior de A , temos $a \leq b_n$ para todo n . Assim, a é uma cota inferior de B , e, portanto, $a \leq b$.

Demonstração do Teorema (continuação)

Consequentemente, podemos escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a \leq b \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Concluimos que $[a, b] \subset I_n$ para cada n , (podendo ser $a = b$). Logo, $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Além disso, nenhum $x < a$ pode pertencer a todos os intervalos I_n . De fato, sendo $a = \sup A$, existe algum $a_n \in A$ tal que $x < a_n$, ou seja, $x \notin I_n$. Da mesma forma, se $y > b$, então $y > b_n$ para algum m , de onde $y \notin I_n$. Concluimos, portanto, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.

Demonstração do Teorema

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado com $a < b$, e seja x_0 um número real qualquer. Existe um intervalo fechado e limitado $J = [c, d]$, com $c < d$, tal que $x_0 \notin J \subset I$. Essa afirmação pode ser facilmente verificada.

Usaremos essa propriedade repetidamente para demonstrar que, dado um subconjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$, podemos sempre encontrar um número real $x \notin X$.

Demonstração do Teorema (continuação)

Inicialmente, seja I_1 um intervalo fechado e não degenerado tal que $x_1 \notin I_1$. Em seguida, escolhemos I_2 , um intervalo do mesmo tipo, com $x_2 \notin I_2 \subset I_1$. Continuamos esse processo indutivamente. Suponhamos que tenhamos obtido $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$, todos intervalos fechados e não degenerados, com $x_i \notin I_i$ para $1 \leq i \leq n$. Podemos então construir $I_{n+1} \subset I_n$ de modo que $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

Assim, obtemos uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \dots$. De acordo com o Teorema 1.84, existe pelo menos um número real x que pertence a todos os intervalos I_n . Como $x_i \notin I_i$ para todo i , concluímos que x não é igual a nenhum dos x_n . Portanto, nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais.

Corolário: Todo intervalo não degenerado de números reais é não enumerável.

Demonstração do Corolário

De fato, consideremos a função $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ definida por $f(x) = (b - a)x + a$, que é uma bijeção entre o intervalo aberto $(0, 1)$ e um intervalo aberto arbitrário (a, b) . Se conseguirmos provar que $(0, 1)$ não é enumerável, podemos concluir que nenhum intervalo não degenerado pode ser enumerável.

Suponhamos, por absurdo, que $(0, 1)$ fosse enumerável. Nesse caso, o intervalo $(0, 1]$ também seria enumerável, o que implicaria que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o intervalo $(n, n + 1)$ também seria enumerável (pois a função $x \mapsto x + n$ estabelece uma bijeção de $(0, 1)$ sobre $(n, n + 1)$). Contudo, isso implicaria que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$ seria enumerável, sendo uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, o que é uma contradição.

Corolário: O conjunto dos números irracionais não é enumerável.

Demonstração do Corolário

De fato, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também fosse enumerável, então $\mathbb{R}$ seria enumerável, pois seria a união de dois conjuntos enumeráveis. No entanto, isso contraria o que provamos no último Teorema.

Sequências

Cristian Coletti

CMCC - UFABC

- Um dos conceitos basilares da Análise Matemática é a noção de limite, e entre os diversos tipos de limites, os das sequências de números reais são os mais simples.

- Um dos conceitos basilares da Análise Matemática é a noção de limite, e entre os diversos tipos de limites, os das sequências de números reais são os mais simples.
- Praticamente todos os conceitos e resultados fundamentais da Análise referem-se, direta ou indiretamente, a limites, o que reforça o papel central que essa ideia desempenha.

Intuição: Podemos visualizar uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ como uma série de pontos sobre a reta numérica.

Intuição: Podemos visualizar uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ como uma série de pontos sobre a reta numérica.

O limite de uma sequência é um ponto ao qual os termos x_n se aproximam e permanecem próximos, desde que o índice n seja suficientemente grande.

Intuição: Podemos visualizar uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ como uma série de pontos sobre a reta numérica.

O limite de uma sequência é um ponto ao qual os termos x_n se aproximam e permanecem próximos, desde que o índice n seja suficientemente grande.

Definição: Uma **sequência real** é uma função dos números naturais nos reais

$$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Observação:

- A imagem do natural n pela sequência s será denotado por s_n , i.e., $s_n := s(n)$.

Observação:

- A imagem do natural n pela sequência s será denotado por s_n , i.e., $s_n := s(n)$.
- A ordem dos números naturais nos leva a dizer que s_1 é o primeiro termo da sequência, que s_2 é o segundo termo da sequência e em geral que s_n é o n -ésimo termo da sequência.

- Em geral, denotaremos a sequência $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por (s_n) ou ainda por $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Em geral, denotaremos a sequência $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por (s_n) ou ainda por $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Em diversas situações, consideraremos funções cujo domínio não seja o conjunto dos naturais, mas sim um subconjunto dos inteiros da forma $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ para algum k .

- Em geral, denotaremos a sequência $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por (s_n) ou ainda por $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Em diversas situações, consideraremos funções cujo domínio não seja o conjunto dos naturais, mas sim um subconjunto dos inteiros da forma $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ para algum k .
- Essas funções também serão ditas sequências e para essas sequências usaremos a notação $(s_n)_{n=k}^{\infty}$, indicando o ponto a partir do qual a sequência está definida.

Exemplo: Considere a sequência (s_n) definida por $s_n = 1 + (-1)^n$. Os primeiros termos da sequência são:

Exemplos de sequências

Exemplo: Considere a sequência (s_n) definida por $s_n = 1 + (-1)^n$. Os primeiros termos da sequência são:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 2 \quad s_5 = 0$$

Exemplos de sequências

Exemplo: Considere a sequência (s_n) definida por $s_n = 1 + (-1)^n$. Os primeiros termos da sequência são:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 2 \quad s_5 = 0$$

Essa sequência também pode ser representada como:

$$(0, 2, 0, 2, 0, \dots)$$

Exemplos de sequências

Exemplo: Considere a sequência (s_n) definida por $s_n = 1 + (-1)^n$. Os primeiros termos da sequência são:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = 0 \quad s_4 = 2 \quad s_5 = 0$$

Essa sequência também pode ser representada como:

$$(0, 2, 0, 2, 0, \dots)$$

Formalmente, essa sequência pode ser representada como a função:

$$s(n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplo Os primeiros termos da sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ são:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{5}$$

Essa sequência também pode essere representada como:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

Exemplo: Os primeiros termos da sequência de termo geral $c_n = \frac{n!}{n^n}$ são:

$$c_1 = \frac{1!}{1^1} = 1 \quad c_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

Exemplos de sequências

Exemplo: Os primeiros termos da sequência de termo geral $c_n = \frac{n!}{n^n}$ são:

$$c_1 = \frac{1!}{1^1} = 1 \quad c_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

Exemplo: Seja (d_n) a sequência especificada pela regra $d_n = (-1)^n$. Os primeiros termos dessa sequência são:

$$d_1 = (-1)^1 = -1 \quad d_2 = (-1)^2 = 1 \quad d_3 = (-1)^3 = -1$$

e de modo geral $d_{2n} = 1$ e $d_{2n+1} = -1$. E assim podemos representar essa sequência por:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

Observação:

- Como uma sequência é uma função dos naturais nos reais, um ponto da função é um par ordenado (n, s_n) com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \in \mathbb{R}$ e desse modo uma sequência real pode ser vista como um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observação:

- Como uma sequência é uma função dos naturais nos reais, um ponto da função é um par ordenado (n, s_n) com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \in \mathbb{R}$ e desse modo uma sequência real pode ser vista como um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Outra forma de representar uma sequência graficamente, é representar sobre a reta real as imagens da sequência, rotuladas pelo termo que representam.

Convergência e limite de sequências

O conceito formal de limite, cuja introdução na matemática se atribui ao matemático francês Cauchy, é um dos conceitos centrais da matemática moderna. Pode-se dizer, sem exageros que esse conceito e seus desenvolvimentos, mudaram de forma profunda o conhecimento e a natureza da matemática.

Convergência e limite de seqüências

O conceito formal de limite, cuja introdução na matemática se atribui ao matemático francês Cauchy, é um dos conceitos centrais da matemática moderna. Pode-se dizer, sem exageros que esse conceito e seus desenvolvimentos, mudaram de forma profunda o conhecimento e a natureza da matemática.

Originalmente, esse conceito foi introduzido para formalizar o conceito de derivada, porém se percebeu que sua importância e aplicação é muito mais ampla e diversa que "apenas" o desenvolvimento lógico do cálculo diferencial e integral.

Definição 2.3 (Definição de Limite): Dado $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência, dizemos que (a_n) converge para o número real L , denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ou ainda $a_n \rightarrow L$, se dado $\epsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que se $n > M$ então $|a_n - L| < \epsilon$.

Definição 2.3 (Definição de Limite): Dado $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência, dizemos que (a_n) converge para o número real L , denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ou ainda $a_n \rightarrow L$, se dado $\epsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que se $n > M$ então $|a_n - L| < \epsilon$.

Uma sequência que converge para algum valor é dita convergente, e caso contrário dizemos que a sequência é divergente.

Definição 2.4 (Definição de Limite, Versão topológica): Dado $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência, dizemos que (a_n) converge para o número real L se para toda ϵ -vizinhança $V_\epsilon(L)$, existe um ponto M a partir do qual todos os termos da sequência estão em $V_\epsilon(L)$.

Definição de limite (versão topológica)

Definição 2.4 (Definição de Limite, Versão topológica): Dado $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência, dizemos que (a_n) converge para o número real L se para toda ϵ -vizinhança $V_\epsilon(L)$, existe um ponto M a partir do qual todos os termos da sequência estão em $V_\epsilon(L)$.

Ou seja, para toda ϵ -vizinhança do ponto L exceto um número finito de elementos da sequência todos os outros estão nessa vizinhança.

Exemplo de limite

Exemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demonstração. Neste caso, devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe um ponto M a partir do qual, $\forall n \geq M$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

(Onde "a partir do qual" deve se entender para todo $n > M$).

Exemplo de limite

Exemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Demonstração. Neste caso, devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe um ponto M a partir do qual, $\forall n \geq M$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

(Onde "a partir do qual" deve se entender para todo $n > M$).

Vamos provar que existe esse ponto usando a propriedade Arquimediana dos reais. A propriedade Arquimediana nos diz que existe um número natural M tal que

$$M > \frac{1}{\epsilon}$$

ou seja, tal que

$$\frac{1}{M} < \epsilon$$

Exemplo de limite Continuação

Agora se $n > M$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$. O que implica que:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$$

Exemplo de limite Continuação

Agora se $n > M$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$. O que implica que:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$$

E assim provamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo de limite Continuação

Agora se $n > M$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$. O que implica que:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$$

E assim provamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Observe que demonstramos que para todo $n > M$ (onde esse M nos foi dado indiretamente pela propriedade Arquimediana dos reais) temos que a sequência $(a_n) = \frac{1}{n}$ está toda contida na ϵ -vizinhança de 0, pois $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$.

Exemplo: Seja b_n a sequência constante igual a b , i.e, $b_n = b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Exemplo de limite

Exemplo: Seja b_n a sequência constante igual a b , i.e, $b_n = b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe um M tal que se $n > M$ então

$$|b_n - b| < \epsilon.$$

Mas veja que para $M = 1$, já é válida a desigualdade, pois $|b_n - b| = |b - b| = 0 < \epsilon$.

Exemplo de limite

Exemplo: Seja b_n a sequência constante igual a b , i.e, $b_n = b$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe um M tal que se $n > M$ então

$$|b_n - b| < \epsilon.$$

Mas veja que para $M = 1$, já é válida a desigualdade, pois $|b_n - b| = |b - b| = 0 < \epsilon$.

A demonstração acima é trivial porque a sequência constante igual a b sempre está na ϵ -vizinhança de b , para todo $\epsilon > 0$.

Exemplo: Se $c_n = \frac{n}{n+1}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Exemplo: Se $c_n = \frac{n}{n+1}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe um M tal que se $n > M$ então

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon.$$

Exemplo de limite

Exemplo: Se $c_n = \frac{n}{n+1}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe um M tal que se $n > M$ então

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon.$$

Vamos começar simplificando a última desigualdade:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Exemplo de limite Continuação

Veja que reduzimos o problema à encontrar um ponto M a partir do qual $\frac{1}{n} < \epsilon$. Mas isso, como já sabemos, pode ser feito através da propriedade Arquimediana.

Exemplo de limite Continuação

Veja que reduzimos o problema à encontrar um ponto M a partir do qual $\frac{1}{n} < \epsilon$. Mas isso, como já sabemos, pode ser feito através da propriedade Arquimediana.

Pela propriedade Arquimediana existe M tal que

$$M > \frac{1}{\epsilon}$$

ou seja, tal que

$$\frac{1}{M} < \epsilon.$$

Exemplo de limite Continuação

Veja que reduzimos o problema à encontrar um ponto M a partir do qual $\frac{1}{n} < \epsilon$. Mas isso, como já sabemos, pode ser feito através da propriedade Arquimediana.

Pela propriedade Arquimediana existe M tal que

$$M > \frac{1}{\epsilon}$$

ou seja, tal que

$$\frac{1}{M} < \epsilon.$$

Agora se $n > M$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon$. O que implica que:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon.$$

Sequência divergente

Intuitivamente, a sequência $i_n = (-1)^n$ não converge pois fica oscilando entre os valores 1 e -1 e desta forma não se aproxima de nenhum valor conforme n cresce. Abaixo apresentamos a prova desse fato.

Exemplo

A sequência $i_n = (-1)^n$ não converge.

Suponha que a sequência convergisse, digamos a i . Então deveria existir um ponto M tal que se $n > M$ então

$$|i_n - i| < \frac{1}{2}$$

Mas, para n maior que M e par isso implicaria que

$$|1 - i| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1 - i < \frac{1}{2} \Rightarrow i > \frac{1}{2}.$$

E para n maior que M e ímpar isso implicaria que

$$|-1 - i| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -1 - i < \frac{1}{2} \Rightarrow i < \frac{1}{2}.$$

O que é absurdo. Logo a sequência não converge.

Proposição: O limite de uma sequência se existir é único.

Demonstração. Suponha a_1 e a_2 tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_2.$$

A definição de $a_n \rightarrow a_1$ nos diz que dado $\varepsilon > 0$ existe um ponto N_1 , tal que $n > N_1$ então:

$$|a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

Por outro lado como $a_n \rightarrow a_2$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe um ponto N_2 , tal que $n > N_2$ então:

$$|a_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2}$$

Demonstração (continuação)

Agora se escolhermos $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos que ambas as desigualdades 2.1 e 2.2 são válidas para $n > N$ e assim podemos estimar $|a_1 - a_2|$:

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - a_n + a_n - a_2| \quad (\text{somando e subtraindo } a_n)$$

$$< |a_1 - a_n| + |a_2 - a_n| < \varepsilon \quad (\text{pela desigualdade triangular})$$

para todo $\varepsilon > 0$ e assim $a_1 = a_2$.