

Funções de uma Variável

Regras de diferenciação

Cristian F. Coletti

2 de outubro de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC



- Regras de diferenciação: Regra da soma

Linearidade

Derivada de polinômios

- Regras de diferenciação: Regra do produto

Exemplos

- Regras de diferenciação: Regra do quociente

Exemplos

Regras de diferenciação: Regra da soma

Regra de diferenciação da soma

Teorema

Se $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em $c \in (a, b)$ então

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ então

$$f'(c) = 3c^2 + \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

para qualquer $c > 0$.

Derivada da soma: Exemplo

□ $f(x) = \cos(x) + e^x$. Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(x) + e^x)' \\ &= (\cos(x))' + (e^x)' \\ &= -\sin(x) + e^x. \end{aligned}$$

Prova da regra da soma

$$\begin{aligned}(f + g)'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(c + h) - (f + g)(c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(c + h) + g(c + h)) - (f(c) + g(c))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} + \frac{g(c + h) - g(c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(c + h) - g(c)}{h} \\&= f'(c) + g'(c).\end{aligned}$$

Derivada de $k.f(x)$

Teorema

Seja f uma função diferenciável em c e seja k uma constante qualquer. Então

$$(k.f)'(c) = k.f'(c).$$

Observação

A prova é imediata e é deixada como exercício.

Derivada de $k.f(x)$

Exemplo

- Seja $f(x) = 4x^2$.
- Neste caso $f'(x) = 4.2x = 8x$.

Linearidade

Teorema

Sejam $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $c \in (a, b)$ e sejam k_1, k_2 duas constantes quaisquer. Então,

$$(k_1f + k_2g)'(c) = k_1f'(c) + k_2g'(c).$$

Exemplo

□ Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Derivada de polinômios

De um modo geral, se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

é um polinômio de grau n , então

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}.$$

Regras de diferenciação: Regra do produto

Regras de diferenciação: Regra do produto

Teorema

Sejam $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $c \in (a, b)$. Então

$$(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Exemplo: Se $f(x) = x^2 \ln(x)$ e $x > 0$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \\ &= x(2 \ln(x) + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Prova da regra do produto

$$\begin{aligned}(f.g)'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h).g(c+h) - f(c).g(c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h).g(c+h) - f(c)g(c+h) + f(c)g(c+h) - f(c).g(c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} g(c+h) + \\&+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(c+h) - g(c)}{h} f(c) \\&= f'(c)g(c) + f(c)g'(c).\end{aligned}\tag{2}$$

Derivada do produto: Exemplo

□ Seja $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$ e seja $x > 0$.

□

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x})' \ln(x) + \sqrt{x} (\ln(x))' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x) + \sqrt{x} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Derivada do produto: Exemplo

□ Seja $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(x) \sqrt{x}$

□

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4 \operatorname{sen}(x))' \sqrt{x} + (x^4 \operatorname{sen}(x)) (\sqrt{x})' \\ &= (4x^3 \operatorname{sen}(x) + x^4 \cos(x)) \sqrt{x} + x^4 \operatorname{sen}(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(3)

Regras de diferenciação: Regra do quociente

Regras de diferenciação: Derivada de $\frac{1}{g}$

Lema

Seja $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in (a, b)$ com $g(c) \neq 0$. Então a função $\frac{1}{g(x)}$ é diferenciável em c com

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{g'(c)}{(g(c))^2}.$$

- Observação: g é diferenciável em c , então g é contínua em c , i.e. $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c) \neq 0$.
- Existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$.

Derivada de $\frac{1}{g(x)}$: Prova

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(c+h)} - \frac{1}{g(c)}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(c) - g(c+h)}{g(c)g(c+h)h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} - \left(\frac{g(c+h) - g(c)}{h} \right) \frac{1}{g(c)g(c+h)} \\&= - \frac{g'(c)}{g(c)^2}.\end{aligned}$$

Derivada de $\frac{1}{g}$: Exemplo

□ Seja $f(x) = \sec(x)$ e observe que $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

□

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \tan(x)\sec(x). \end{aligned}$$

Regra de diferenciação: Regra do quociente

Teorema

Sejam $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $c \in (a, b)$ com $g(c) \neq 0$. Então a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ é diferenciável em c e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

- A regra do quociente é consequência direta do lema anterior (Derivada de $1/g$) e da regra de diferenciação para um produto de funções:
- De fato, $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.

Exemplo: Seja $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x + 1}$. Então, se $x \neq -1$ temos que

$$f'(x) = \frac{(4x - 1)(x + 1) - (2x^2 - x + 1)(1)}{(x + 1)^2}.$$

Temos que, para todo $x \neq -1$,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^2}.$$

Exemplo: Seja $f(x) = \tan(x)$ e observe que

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Observe também que se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então $\cos(x) \neq 0$. Para tais x temos

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2(x) \quad (\text{ou}) \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \sec^2(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Exemplo: Seja $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\ln(x)}$ e assumamos que $x > 0, x \neq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\text{sen}(x)}{\ln(x)}\right)' &= \frac{(\text{sen}(x))' \ln(x) - \text{sen}(x) (\ln(x))'}{\ln^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x) \ln(x) - \frac{\text{sen}(x)}{x}}{\ln^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)}{\ln(x)} - \frac{\text{sen}(x)}{x \ln^2(x)}.\end{aligned}$$

Exemplo: Seja $f(x) = \frac{x^2 e^x + 2 \ln(x)}{\cos(x) + 2}$ e seja $x > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 e^x + 2 \ln(x)}{\cos(x) + 2} \right)' &= \frac{(2xe^x + x^2 e^x + 2\frac{1}{x})(\cos(x) + 2) - (x^2 e^x + 2 \ln(x))(-\sin(x))}{(\cos(x) + 2)^2} \\ &= \frac{(2xe^x + x^2 e^x + 2\frac{1}{x})(\cos(x) + 2) + (x^2 e^x + 2 \ln(x))\sin(x)}{(\cos(x) + 2)^2} \end{aligned}$$

Funções de uma Variável

Regra da cadeia

Cristian F. Coletti

2 de outubro de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC



- Regra da cadeia

- Exemplos

- Aplicações

- Ideia da Demonstração

Regra da cadeia

A regra da cadeia

- Para poder derivar as funções elementares nos falta aprender a derivar funções do tipo

$$\sin(x^2), \sin^2(x), \sin^3(x^2).$$

- As funções mais simples envolvidas acima são

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3.$$

A regra da cadeia

- Calcular as derivadas das funções f, g e h é simples.
- O desafio consiste em combinar as funções f, g, f' e g' para calcularmos $(f \circ g)'$.
- A regra da cadeia nos fornece a solução para esse problema.

Regra da cadeia

Teorema

Se

- g é diferenciável em x_0 , e
- f é diferenciável em $y_0 = g(x_0)$,

então $f \circ g$ é diferenciável em x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Exemplos

Exemplo

Calcule a derivada de $\text{sen}(\sqrt{x})$.

Resolução:

- Faça $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$ e observe que

$$\text{sen}(\sqrt{x}) = \text{sen}(g(x)) = f(g(x)).$$

- Como $f'(x) = \cos(x)$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ temos que

$$\begin{aligned}(\text{sen}(\sqrt{x}))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

Exemplo

Calcule a derivada de $(x^2 + 1)^7$.

Resolução:

- Faça $f(x) = x^7$ e $g(x) = x^2 + 1$ e observe que

$$(x^2 + 1)^7 = f(g(x)).$$

- Como $f'(x) = 7x^6$ e $g'(x) = 2x$ temos que

$$\begin{aligned} ((x^2 + 1)^7)' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 7(x^2 + 1)^6 \cdot 2x \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Calcule a derivada de $e^{\text{sen}(x)}$.

Resolução:

- Faça $f(x) = e^x$ e $g(x) = \text{sen}(x)$ e observe que

$$e^{\text{sen}(x)} = f(g(x)).$$

- Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos(x)$ temos que

$$\begin{aligned}(e^{\text{sen}(x)})' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= e^{\text{sen}(x)} \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios

- Calcule a derivada de $\cos(x^2)$
- Calcule a derivada de $e^{\sin(x^2)}$
- Utilize a regra da cadeia para verificar que a derivada (primeira) da função $\ln(|x|)$ é $1/x$.
- Seja $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e diferenciável. Verifique que f' é uma função ímpar.

Aplicações

Derivada de $\ln(g(x))$

- Seja $g(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$ e assuma que g seja diferenciável em (a, b) .
- Seja $f(x) = \ln(x)$ e observe que $\ln(g(x)) = f(g(x))$.
- Aplicando a regra da cadeia e lembrando que $f'(x) = 1/x$ obtemos

$$\begin{aligned}(\ln(g(x)))' &= (f(g(x)))' \\&= f'(g(x))g'(x) \\&= \frac{1}{g(x)}g'(x) \\&= \frac{g'(x)}{g(x)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Aplicações

Calcule a derivada de

$$y(x) = x^{x^2} \quad (x > 0).$$

Resolução:

Uma técnica muito útil consiste em aplicar logaritmo em ambos os lados da igualdade acima. Obtemos

$$\begin{aligned}\ln(y(x)) &= \ln(x^{x^2}) \\ &= x^2 \ln(x)\end{aligned}$$

e dessa forma temos que

$$(\ln(y(x)))' = (x^2 \ln(x))' \tag{2}$$

Aplicações

Por um lado temos que

$$(\ln(y(x)))' = \frac{y'(x)}{y(x)}. \quad (3)$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} (x^2 \ln(x))' &= (x^2)' \ln(x) + x^2 (\ln(x))' \\ &= 2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x} \\ &= x(2 \ln(x) + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Aplicações

Inserindo 3 e 4 em 2 obtemos

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x(2\ln(x) + 1)$$

Lembrando que $y(x) = x^{x^2}$ concluimos que

$$y'(x) = x^{x^2} x(2\ln(x) + 1).$$

Ideia da Demonstração

Intuição

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\&= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\&= \underbrace{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(y) - f(y_c)}{y - y_c}}_{\text{mudança: } y=g(x)} \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\&\rightarrow f'(y_c)g'(c) \\&= f'(g(c))g'(c)\end{aligned}$$

quando $x \rightarrow c$. No entanto há um erro. Qual?