

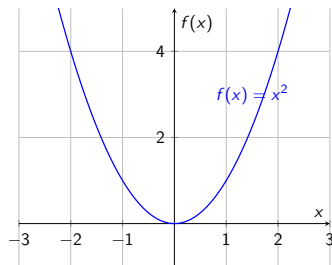
Análise Comparativa das Funções x^2 , $-x^2$ e x^3

Cristian Favio Coletti

Terceiro quadrimestre de 2025

$$f(x) = x^2$$

Função quadrática - Parábola



$f(x) = x^2$ - Propriedades

- **Domínio:** $\mathbb{R}$
- **Imagem:** $[0, +\infty[$
- **Paridade:** PAR ($f(-x) = f(x)$)
- **Interseções:** $(0, 0)$

Limites:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

Derivada primeira:

$$f'(x) = 2x$$

- $f'(x) = 0$ em $x = 0$
- Decrescente em $] -\infty, 0[$
- Crescente em $]0, +\infty[$
- Mínimo em $(0, 0)$

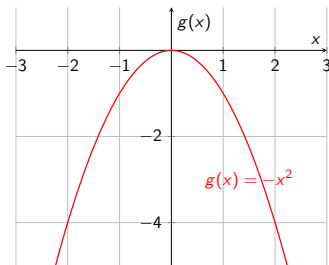
Derivada segunda:

$$f''(x) = 2 > 0$$

- Concavidade sempre para cima

$$g(x) = -x^2$$

Função quadrática - Parábola invertida



$g(x) = -x^2$ - Propriedades

- **Domínio:** $\mathbb{R}$
- **Imagem:** $] -\infty, 0]$
- **Paridade:** PAR ($g(-x) = g(x)$)
- **Interseções:** $(0, 0)$

Limites:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^2 = -\infty$$

Derivada primeira:

$$g'(x) = -2x$$

- $g'(x) = 0$ em $x = 0$
- Crescente em $] -\infty, 0[$
- Decrescente em $]0, +\infty[$
- Máximo em $(0, 0)$

Derivada segunda:

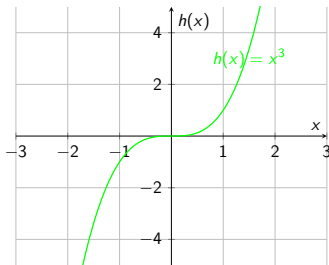
$$g''(x) = -2 < 0$$

- Concavidade sempre para baixo

$h(x) = x^3$ - Introdução

$$h(x) = x^3$$

Função cúbica



$h(x) = x^3$ - Propriedades

- **Domínio:** $\mathbb{R}$
- **Imagem:** $\mathbb{R}$
- **Paridade:** ÍMPAR ($h(-x) = -h(x)$)
- **Interseções:** $(0, 0)$

Limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Derivada primeira:

$$h'(x) = 3x^2$$

- $h'(x) = 0$ em $x = 0$
- Crescente em $\mathbb{R}$
- Ponto de sela em $(0, 0)$

Derivada segunda:

$$h''(x) = 6x$$

- $h''(x) = 0$ em $x = 0$
- Concavidade para baixo em $] -\infty, 0[$
- Concavidade para cima em $]0, +\infty[$
- Ponto de inflexão em $(0, 0)$

Gráficos Comparativos

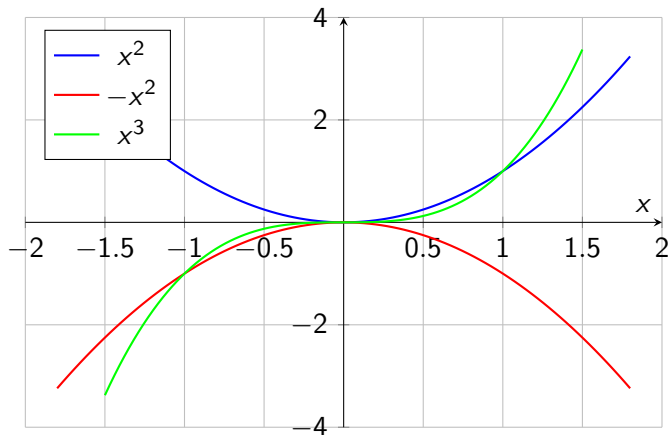


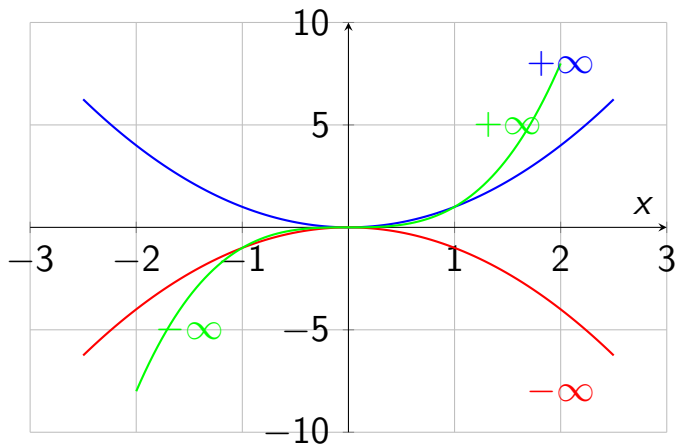
Tabela Comparativa

Característica	x^2	$-x^2$	x^3
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Imagem	$[0, \infty[$	$] - \infty, 0]$	$\mathbb{R}$
Paridade	Par	Par	Ímpar
Interseções	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
Crescimento	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	Sempre
Decrescimento	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	Nunca
Extremos	Mínimo	Máximo	Nenhum
Concavidade	Para cima	Para baixo	Mista

Derivada	x^2	$-x^2$	x^3
$f'(x)$	$2x$	$-2x$	$3x^2$
$f''(x)$	2	-2	$6x$
Pontos críticos	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Ponto de inflexão	Não	Não	$x = 0$

- x^2 e $-x^2$ são simétricos em relação ao eixo x
- x^3 tem simetria ímpar (rotacional)
- x^3 é sempre crescente

Comportamento no Infinito



Análise Completa da Função $f(x) = x^2 - x^4$

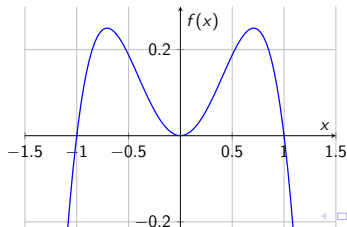
Cristian Favio Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

$$f(x) = x^2 - x^4$$

Função polinomial de quarto grau

- Combinação de termos quadrático e quártico
- Comportamento interessante com múltiplos pontos críticos
- Estudo completo de crescimento e concavidade



Domínio:

$$D_f = \mathbb{R} \quad (\text{Todos os números reais})$$

Imagem:

$$Im_f = \left] -\infty, \frac{1}{4} \right]$$

Valor máximo: $\frac{1}{4}$

Com o eixo y:

$$f(0) = 0^2 - 0^4 = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

Com o eixo x:

$$x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm 1$$

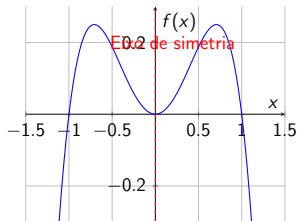
Pontos de interseção:

$$(-1, 0), \quad (0, 0), \quad (1, 0)$$

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x)$$

Conclusão: Função PAR

- Simétrica em relação ao eixo y
- Comportamento idêntico para x e $-x$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^4) = -\infty$$

Comportamento dominante:

- Termo $-x^4$ domina para $|x|$ grande
- Função tende a $-\infty$ em ambos os extremos

Assíntotas verticais: Não existem

Assíntotas horizontais: Não existem

Assíntotas oblíquas: Não existem

Justificativa:

- Função polinomial contínua em $\mathbb{R}$
- Limites infinitos impedem assíntotas horizontais
- Comportamento quártico impede assíntotas oblíquas

$$f(x) = x^2 - x^4$$

$$f'(x) = 2x - 4x^3$$

$$f'(x) = 2x(1 - 2x^2)$$

Fatorada:

$$f'(x) = 2x(1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)$$

$$f'(x) = 2x(1 - 2x^2) = 0$$

Soluções:

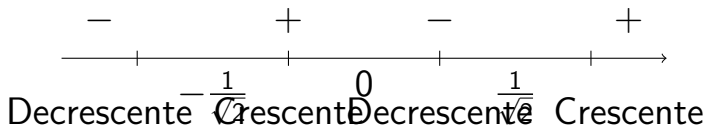
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707$$

Pontos críticos:

$$(0, 0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4} \right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4} \right)$$

Estudo do Sinal da Derivada Primeira



- **Mínimo local** em $x = 0$
- **Máximos locais** em $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f'(x) = 2x - 4x^3$$

$$f''(x) = 2 - 12x^2$$

$$f''(x) = 2(1 - 6x^2)$$

$$f''(x) = 2(1 - 6x^2) = 0$$

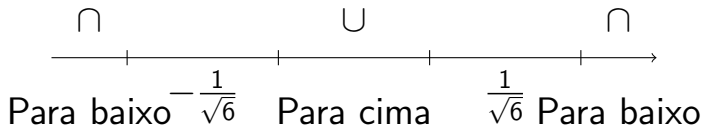
$$1 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{6}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \approx \pm 0.408$$

Pontos de inflexão:

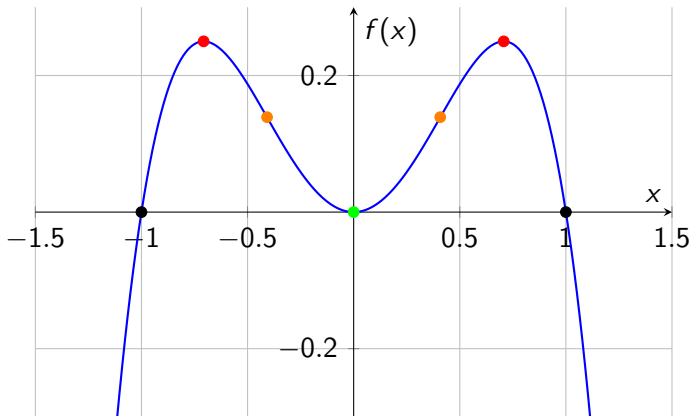
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right)$$

Concavidade



- Concavidade para baixo em $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty\right)$
- Concavidade para cima em $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Esboço do Gráfico



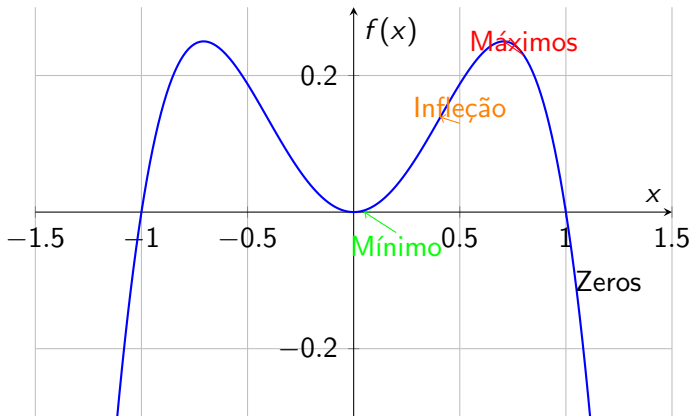
Valores Importantes

x	$f(x)$	Tipo
-1	0	Zero
-0.707	0.25	Máximo local
-0.408	0.139	Ponto de inflexão
0	0	Mínimo local
0.408	0.139	Ponto de inflexão
0.707	0.25	Máximo local
1	0	Zero

- Valor máximo: $\frac{1}{4} = 0.25$
- Valor nos pontos de inflexão: $\frac{5}{36} \approx 0.139$

- **Domínio:** $\mathbb{R}$
- **Imagem:** $] -\infty, \frac{1}{4}]$
- **Paridade:** Par
- **Zeros:** $x = -1, 0, 1$
- **Pontos críticos:** $x = 0$ (mínimo), $x = \pm 0.707$ (máximos)
- **Pontos de inflexão:** $x = \pm 0.408$
- **Concavidade:** Mista

Comportamento Global



Características notáveis:

- Exemplo clássico de função com múltiplos pontos críticos
- Ilustra bem a competição entre termos de diferentes graus
- Comportamento de "montanha" com dois picos e um vale

Aplicações:

- Modelagem de potenciais em física
- Estudo de estabilidade em sistemas dinâmicos
- Exemplo em teoria de catástrofes

Análise da Função $f(x) = xe^{5-7x^2}$

Cristian Favio Coletti

Terceiro Quadrimestr de 2025

$$f(x) = xe^{5-7x^2}$$

Vamos analisar completamente esta função exponencial-polinomial:

- Domínio e imagem
- Interseções com os eixos
- Limites e assíntotas
- Derivadas e pontos críticos
- Concavidade e pontos de inflexão
- Esboço do gráfico

Domínio:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Imagem:

$$Im_f = \mathbb{R}$$

Paridade:

$$f(-x) = (-x)e^{5-7(-x)^2} = -xe^{5-7x^2} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ Função ÍMPAR

Com o eixo y:

$$f(0) = 0 \cdot e^5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

Com o eixo x:

$$xe^{5-7x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

Única interseção: Origem $(0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{5-7x^2} = 0$$

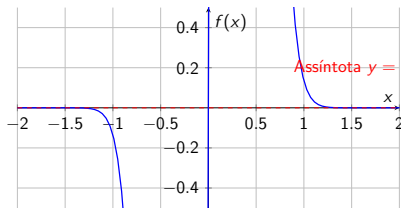
por valores positivos.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{5-7x^2} = 0$$

por valores negativos. **Assíntota horizontal:**

$$y = 0$$

Comportamento Assintótico



A função tende a zero por valores positivos quando $x \rightarrow +\infty$
e por valores negativos quando $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = xe^{5-7x^2}$$

Regra do produto:

$$f'(x) = (1)e^{5-7x^2} + xe^{5-7x^2}(-14x)$$

$$f'(x) = e^{5-7x^2}(1 - 14x^2)$$

$$f'(x) = e^{5-7x^2}(1 - 14x^2) = 0$$

Como $e^{5-7x^2} > 0$ para todo x :

$$1 - 14x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{14}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{14}} \approx \pm 0.267$$

Intervalo	Sinal de $f'(x)$	Comportamento
$x < -\frac{1}{\sqrt{14}}$	—	Decrescente
$-\frac{1}{\sqrt{14}} < x < \frac{1}{\sqrt{14}}$	+	Crescente
$x > \frac{1}{\sqrt{14}}$	—	Decrescente

- **Máximo local** em $x = \frac{1}{\sqrt{14}}$
- **Mínimo local** em $x = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}e^{5-7\cdot\frac{1}{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}e^{5-0.5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}e^{4.5} \approx 0.267 \times 90.02 \approx 24.04$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{14}}e^{4.5} \approx -24.04$$

$$f'(x) = e^{5-7x^2}(1 - 14x^2)$$

Regra do produto:

$$f''(x) = e^{5-7x^2}(-28x) + (1 - 14x^2)e^{5-7x^2}(-14x)$$

$$f''(x) = -28xe^{5-7x^2} - 14x(1 - 14x^2)e^{5-7x^2}$$

$$f''(x) = -14xe^{5-7x^2}(2 + 1 - 14x^2)$$

$$f''(x) = -14xe^{5-7x^2}(3 - 14x^2)$$

$$f''(x) = -14xe^{5-7x^2}(3 - 14x^2) = 0$$

Soluções:

- $x = 0$
- $3 - 14x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{14} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{14}} \approx \pm 0.463$

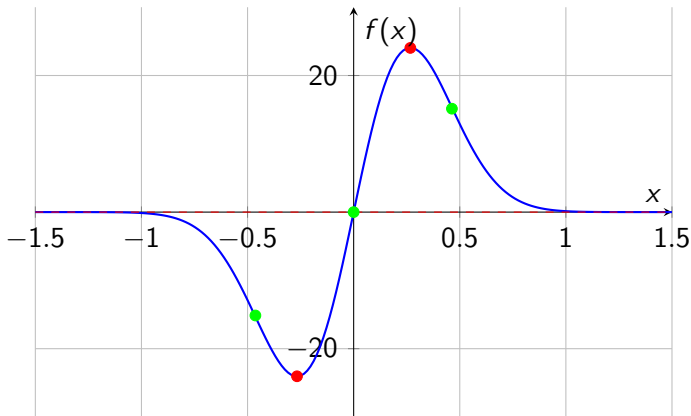
Pontos de inflexão:

$$(0, 0), \quad (\pm 0.463, \pm 0.463 \cdot e^{5-7 \cdot 0.214})$$
$$\approx (\pm 0.463, \pm 0.463 \cdot e^{3.5}) \approx (\pm 0.463, \pm 15.14)$$

Concavidade

Intervalo	Sinal de $f''(x)$	Concavidade
$x < -0.463$	+	Para cima
$-0.463 < x < 0$	-	Para baixo
$0 < x < 0.463$	+	Para cima
$x > 0.463$	-	Para baixo

Esboço do Gráfico

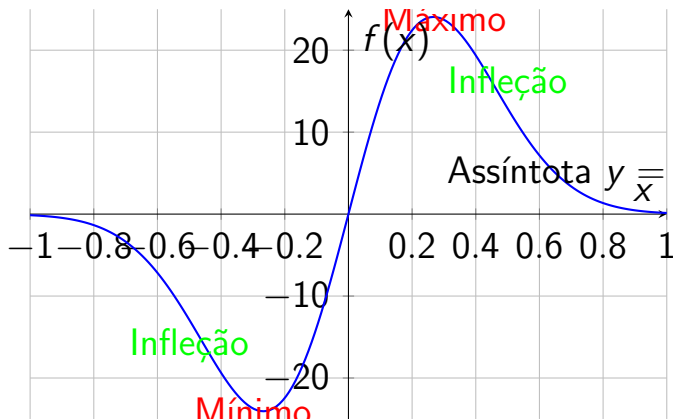


Resumo dos Pontos Importantes

Ponto	Coordenadas	Tipo
$x \approx -0.267$	$(-0.267, -24.04)$	Mínimo local
$x = 0$	$(0, 0)$	Ponto de inflexão
$x \approx 0.267$	$(0.267, 24.04)$	Máximo local
$x \approx -0.463$	$(-0.463, -15.14)$	Ponto de inflexão
$x \approx 0.463$	$(0.463, 15.14)$	Ponto de inflexão

- **Função ímpar** (simétrica em relação à origem)
- **Assíntota horizontal** $y = 0$
- **Máximo local** em $x \approx 0.267$, $y \approx 24.04$
- **Mínimo local** em $x \approx -0.267$, $y \approx -24.04$
- **3 pontos de inflexão**
- **Crescente** em $(-0.267, 0.267)$
- **Decrescente** fora deste intervalo

Comportamento Global



Análise Completa da Função $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

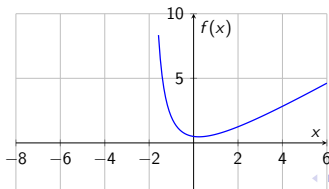
Cristian Favio Coletti

Terceiro quadrimestre de 2025

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

Função racional - Quociente de polinômios

- Numerador: $x^2 + 1$ (polinômio do 2º grau)
- Denominador: $x + 2$ (polinômio do 1º grau)
- Comportamento assintótico interessante



$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

Condição de existência:

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

Domínio:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =] - \infty, -2[\cup] - 2, +\infty[$$

Com o eixo y:

$$f(0) = \frac{0^2 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Com o eixo x:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$$

Equação sem solução real!

- Não há interseção com o eixo x
- A função nunca se anula

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x) + 2} = \frac{x^2 + 1}{2 - x}$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{e} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Conclusão: Função NEM PAR NEM ÍMPAR

- Não possui simetria em relação ao eixo y
- Não possui simetria em relação à origem

Ponto problemático: $x = -2$

Limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = +\infty$$

Assíntota vertical:

$$x = -2$$

Divisão de polinômios:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2} = x - 2 + \frac{5}{x + 2}$$

Comportamento no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x + 2} = 0$$

Assíntota oblíqua:

$$y = x - 2$$

Usando a forma simplificada:

$$f(x) = x - 2 + \frac{5}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Comportamento:

- A função aproxima-se da reta $y = x - 2$
- Cresce/décresce indefinidamente

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

Regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x + 2) - (x^2 + 1)(1)}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2} = 0$$

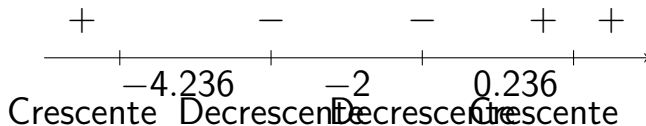
$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{5}$$

Pontos críticos:



- **Máximo local** em $x \approx -4.236$
- **Mínimo local** em $x \approx 0.236$
- **Descontinuidade** em $x = -2$

Máximo local:

$$\begin{aligned} f(-2 - \sqrt{5}) &= \frac{(-2 - \sqrt{5})^2 + 1}{(-2 - \sqrt{5}) + 2} = \frac{4 + 4\sqrt{5} + 5 + 1}{-\sqrt{5}} \\ &= \frac{10 + 4\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = -2\sqrt{5} - 4 \approx -8.472 \end{aligned}$$

Mínimo local:

$$\begin{aligned} f(-2 + \sqrt{5}) &= \frac{(-2 + \sqrt{5})^2 + 1}{(-2 + \sqrt{5}) + 2} = \frac{4 - 4\sqrt{5} + 5 + 1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 4 \approx 0.472 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}$$

Regra do quociente:

$$f''(x) = \frac{(2x + 4)(x + 2)^2 - (x^2 + 4x - 1) \cdot 2(x + 2)}{(x + 2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x + 4)(x + 2) - 2(x^2 + 4x - 1)}{(x + 2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 8x + 8 - 2x^2 - 8x + 2}{(x + 2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{10}{(x+2)^3}$$

Sinal da derivada segunda:

- $f''(x) > 0$ para $x > -2 \rightarrow$ Concavidade para CIMA
- $f''(x) < 0$ para $x < -2 \rightarrow$ Concavidade para BAIXO

Pontos de inflexão:

- Não existem (a derivada segunda nunca se anula)
- Mudança de concavidade em $x = -2$ (não é ponto do domínio)

Esboço Completo do Gráfico

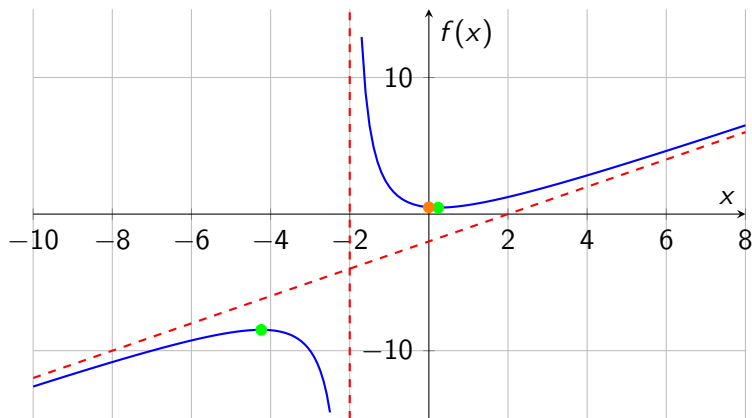


Tabela de Valores Importantes

x	$f(x)$	Tipo
-8	-9.17	Máximo local
-4.236	-8.472	
-3	-5	
-2.5	-5.8	
-1.5	3.4	Interseção com eixo y Mínimo local
0	0.5	
0.236	0.472	
2	2.5	
4	3.4	
6	5.125	

Domínio: $\mathbb{R} - \{-2\}$

Imagem: $\mathbb{R}$

Assíntotas:

- Vertical: $x = -2$
- Oblíqua: $y = x - 2$

Pontos críticos:

- Máximo: $(-4.236, -8.472)$
- Mínimo: $(0.236, 0.472)$

Concavidade:

- Para baixo em $] - \infty, -2[$
- Para cima em $] - 2, +\infty[$

Comportamento Global

