

Séries Numéricas

Seção 4.7: Teste da Raiz e do Quociente

4.7 Teste da raiz e do quociente

4.29 Teorema (Teste da Raiz) Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, seja $R = \limsup |a_n|^{1/n}$.

- Se $R < 1$, então a série converge absolutamente.
- Se $R > 1$, então a série diverge.
- Caso contrário, $R = 1$, e o teste não fornece informações sobre a convergência ou divergência.

Demonstração. Se $R < 1$, escolha r tal que $R < r < 1$. Então, temos $|a_n|^{1/n} \leq r$ para n suficientemente grande, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge.

Pelo teste da comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

Se $R > 1$, então $|a_n| \geq 1$ para infinitos termos, o que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Prova do teste da raiz: $R < 1$

Seja $R < 1$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $R + \epsilon < 1$.

Pela definição de limsup, temos:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \right)$$

Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$:

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} < R + \epsilon$$

Em particular, para cada $k \geq N$, temos:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \sup_{j \geq k} \sqrt[j]{|a_j|} < R + \epsilon$$

Elevando ambos os lados à potência k :

$$|a_k| < (R + \epsilon)^k \quad \text{para todo } k \geq N$$

Teste da raiz: Caso $R < 1$

Como $0 \leq R + \epsilon < 1$, a série geométrica:

$$\sum_{k=N}^{\infty} (R + \epsilon)^k$$

converge.

Pelo **teste da comparação**, a série:

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$$

converge, logo a série original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Caso $R > 1$

Suponha que $R > 1$. Pela definição de limsup, para infinitos valores de n , temos:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

De fato, se existisse N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ para todo $n \geq N$, então:

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 1 \quad \text{para todo } n \geq N$$

e portanto $R \leq 1$, contradizendo $R > 1$.

Para esses infinitos valores de n , temos:

$$|a_n| > 1$$

Logo, o termo geral a_n não tende a zero quando $n \rightarrow \infty$, pois $|a_n| > 1$ para infinitos n .

Pelo teste do n -ésimo termo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Caso $R = 1$

Mostramos que existem exemplos onde $R = 1$ mas o comportamento da série é diferente.

Exemplo A (Convergência): Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Temos:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, temos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Porém, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série p com $p = 2 > 1$).

Exemplo B (Divergência): Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Temos:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, temos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Porém, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmônica).

Portanto, quando $R = 1$, o teste é inconclusivo.

4.30 Exemplo

Por aplicação do Teste da raiz é fácil determinar a convergência da série $\sum_{n=3}^{\infty} (\log n)^{-n}$, pois que

$$a_n^{1/n} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

4.31 Exemplo

Aplicando o Teste da raiz a $\sum [n/(n+1)]^{n^2}$, encontramos

$$a_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

dado que $1/e < 1$, a série converge.

Uma aplicação ligeiramente distinta do critério de comparação conduz ao critério do quociente.

4.32 Teorema (Teste da Razão) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos.

- ❶ Se $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, então a série converge absolutamente.
- ❷ Se $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, então a série diverge.
- ❸ Caso contrário, $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, e o teste não fornece informação sobre a convergência ou divergência.

Demonstração.

Seja $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$. Se $L < 1$, então escolha r de forma que $L < r < 1$. Pela propriedade "Para todo $\epsilon > 0$ existe um número natural N tal que $n \geq N$ implica que $s_n < m + \epsilon$ ", existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r.$$

Segue-se por indução que

$$\left| \frac{a_{n+k}}{a_n} \right| \leq r^k |a_n|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $0 < r < 1$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ também converge, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente pelo teste da comparação.

Se $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, então segue-se que $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para n suficientemente grande. Logo, a sequência (a_n) não pode convergir para zero, e pelo Teorema 4.5 a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deve divergir.

A parte (c) segue da observação de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge e a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, conforme vimos anteriormente no Exemplo 4.7. Para ambas as séries temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$. $\square$

4.33 Exemplo

- Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Seja $a_n = \frac{n}{2^n}$, temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{n+1}{2n}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$. Similarmente, $|a_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}}{2}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2}$. Assim, tanto o teste da razão quanto o teste da raiz indicam que $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ converge.

- Qualquer serie da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, onde $p \in \mathbb{R}$, é chamada de série-p. Para essa série,

$$r = R = \alpha = 1$$

para qualquer $p > 0$; assim, ambos os testes são inconclusivos. Para $p \leq 1$, temos $n^p \leq n$, de modo que $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$. Como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, concluímos, pelo teste da comparação, que a série-p diverge para $p \leq 1$.

- Considere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k!}, \quad 0 < p < \infty.$$

Aqui, $a_k = \frac{p^k}{k!}$. Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p^{k+1}}{p^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = p \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Pelo teste da razão, a série converge para todo $p, 0 < p < \infty$. Neste exemplo, a presença de $k!$ torna o teste da raiz difícil de usar.

- Considere $\sum a_n$, onde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{se } n = 2k \\ \frac{1}{3^n}, & \text{se } n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Aqui,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots.$$

Por cálculo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^k, & n = 2k \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^k, & n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Consequentemente, $r = 0$ e $R = \infty$. Portanto, o teste da razão é inconclusivo. Por outro lado,

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 2k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{1/(2k+1)}, & n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^{1/(2k+1)} = 1.$$

Portanto, $\alpha = 1/\sqrt{2}$, e a série converge pelo teste da raiz.

O Exemplo 4.33 fornece um exemplo de uma série para a qual o teste da razão é inconclusivo, mas o teste da raiz funcionou. Assim, parece que o teste da raiz é um teste mais forte, fato que é confirmado pelo teorema a seguir.

4.34 Teorema Seja (a_n) uma sequência de números positivos. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Observação: Como consequência do teorema, se uma série $\sum a_k$ converge pelo teste da razão, ou seja, $R < 1$, então também temos $\alpha < 1$.

Similarmente, se $\sum a_k$ diverge pelo teste da razão, ou seja, $r > 1$, então também temos $\alpha > 1$. Assim, se o teste da razão prova a convergência ou divergência da série, o teste da raiz também o faz. O contrário, no entanto, como indicado acima, é falso.

Demonstração.

Seja

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Se $R = \infty$, então não há nada a provar. Assim, suponha que $R < \infty$, e seja $\beta > R$ arbitrário. Então existe um número inteiro positivo n_0 tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Como na demonstração do teste da razão, isso nos dá $a_n \leq M\beta^n$ para todo $n \geq n_0$, onde $M = a_{n_0}/\beta^{n_0}$. Logo,

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \beta \sqrt[n]{M} \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1$, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \beta.$$

Como $\beta > R$ era arbitrário, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq R$, o que prova o resultado. A desigualdade para o limite inferior é provada de maneira similar. $\square$

Números reais e sequencias

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre 2025

4.9 Teste da integral

Para aplicar os critérios de comparação é necessário dispor de alguns exemplos de séries de comportamento conhecido. As séries geométricas e as séries p são importantes para esta finalidade. Novos exemplos podem ser obtidos de maneira muito simples por aplicação do critério de comparação com um integral, pela primeira vez demonstrado por Cauchy em 1837.

Critério de comparação com a integral

4.38 Teorema (Critério de comparação com a integral) Se f é uma função positiva decrescente, definida para todo real $x \geq 1$ e, se para cada $n \geq 1$, é

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

e

$$t_n = \int_1^n f(x) dx$$

então ambas as séries (s_n) e (t_n) convergem ou divergem.

Demonstração

Demonstração. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e que $a_k = f(k)$ para $k \geq 1$.

Para provar a primeira implicação, suponha que $\int_1^\infty f(x)dx$ converge, de modo que:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = L$$

para algum número finito L .

Demonstração (cont.)

Como $a_k = f(k)$ para $k \geq 1$ e $f(x)$ é decrescente, podemos concluir que:

$$a_k \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \Rightarrow \sum_{k=2}^n a_k \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x)dx = \int_1^n f(x)dx$$

Somando o número finito a_1 em ambos os lados desta desigualdade, temos:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \sum_{k=2}^n a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

Demonstração (cont.)

Como $f(x) > 0$, $\int_1^n f(x)dx$ aumenta à medida que n aumenta, de modo que:

$$s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + \int_1^\infty f(x)dx = a_1 + L$$

Isso nos diz que a sequência (s_n) é limitada superiormente. Como $f(x) > 0$, sabemos que $a_{n+1} = f(n+1) > 0$ para qualquer $n \geq 1$, então:

$$s_{n+1} = a_{n+1} + s_n > s_n$$

Demonstração (cont.)

o que significa que (s_n) é uma sequência crescente. O Teorema da Convergência Monótona nos diz, então, que (s_n) é uma sequência convergente, logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Agora, suponha que $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge. Como $a_k = f(k)$ para $k \geq 1$ e $f(x)$ é decrescente, podemos concluir que:

$$a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n a_k \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Demonstração (cont.)

Como $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge, sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx = \infty$$

então (s_n) é uma sequência divergente e $\sum_{k=1}^\infty a_k$ diverge.

Exemplo 4.39 (Série p)

O critério de comparação com um integral permite demonstrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge-se e somente se } p > 1$$

Fazendo $f(x) = x^{-p}$ tem-se

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{n^{1-p}-1}{1-p} & \text{se } p \neq 1 \\ \log n & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

Exemplo 4.39 (cont.)

Se $p > 1$ o termo $n^{1-p} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e por isso (t_n) converge. Pelo critério do integral, tal implica a convergência da série para $s > 1$. Quando $p \leq 1$ então $t_n \rightarrow \infty$ e a série diverge. O caso especial $p = 1$, a série harmônica, também diverge. Esse caso já havia sido discutido no Exemplo 4.7.

Exemplo 4.40

O mesmo método pode ser utilizado para demonstrar que²

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \text{ converge-se e somente se } s > 1$$

A correspondente integral neste caso é

$$t_n = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s} dx = \begin{cases} \frac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1-s} & \text{se } s \neq 1 \\ \log(\log n) - \log(\log 2) & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

Exemplo 4.40 (cont.)

Então (t_n) converge se e só se $s > 1$ e por tal motivo, em virtude do critério do integral, o mesmo acontece com a série em questão.

4.10 Séries alternadas

Dedicamos os estudos anteriores à análise minuciosa de séries de termos não negativos. Agora, nosso foco se volta para séries alternadas, que se caracterizam pela alternância de sinais em seus termos, e que podem ser expressas na forma geral:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

com $a_n > 0$.

4.41 Teorema (Teste de Séries Alternadas) Se (a_n) é uma sequência decrescente de números positivos e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converge.

Demonstração

Demonstração. Vamos mostrar que a sequência (s_n) das somas parciais converge. Existem dois tipos de somas parciais, dependendo de estarmos somando um número ímpar ou par de termos. Por exemplo,

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Agora, como (a_n) é decrescente, temos $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

e a subsequência (s_{2n}) é crescente.

Demonstração (cont.)

Ela também é limitada superiormente, pois para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, a subsequência (s_{2n}) converge para algum número real s .

Demonstração (cont.)

Para as somas parciais de índice ímpar, temos

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$. Mas $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, então devemos ter $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s$.

Demonstração (cont.)

Combinando esses resultados, vemos que, dado $\varepsilon > 0$, existem N_1 e N_2 tais que $n \geq N_1$ implica que $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ e $n \geq N_2$ implica que $|s_{2n+1} - s| < \varepsilon$. Assim, para $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, $|s_n - s| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$, de modo que a sequência (s_n) das somas parciais converge. $\square$

Exemplo 4.42

Como a sequência $(1/n)$ é decrescente e $1/n \rightarrow 0$, vemos que a série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge.

Para determinarmos o valor dessa série utilizaremos a série logarítmica

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

que como provaremos mais adiante converge sempre que $-1 < x \leq 1$.

Exemplo 4.42 (cont.)

Para x positivo é uma série alternada. Em particular, quando $x = 1$, obtemos a fórmula

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

a qual nos diz que a soma da série harmônica alternada é $\log 2$. Este resultado é de particular interesse em virtude do fato da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergir.

Números reais e sequencias

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

4.11 Rearranjo de Séries

A propriedade comutativa da adição garante que, em uma soma finita, a ordem dos termos não altera o resultado final. No entanto, essa propriedade não se estende, em geral, a somas infinitas (séries). Ao lidarmos com séries infinitas, a situação torna-se mais complexa, e algumas propriedades intuitivas podem não se manter. Em 1852, o matemático Bernhard Riemann demonstrou um resultado surpreendente: a ordem dos termos em uma série condicionalmente convergente pode afetar o valor da soma, podendo até mesmo fazer com que a série convirja para diferentes valores ou divirja.

Exemplo de Série Condicionalmente Convergente

Considere a série alternada:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

Essa série converge para 0, pois, para um número suficientemente grande de termos, as somas parciais se aproximam arbitrariamente de 0. No entanto, se substituirmos todos os termos pelos seus valores absolutos, obtemos

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

que é uma série divergente, pois equivale à série harmônica duplicada. Assim, a série original é condicionalmente convergente.

Utilizando rearranjos apropriados dos termos da série original, é possível obter séries que convergem para valores diferentes de zero. Por exemplo, ao reordenar os termos tomando dois termos positivos seguidos de um termo negativo, repetidamente, obtemos:

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \dots$$

Essa série converge para um valor diferente de zero. De fato, de maneira geral, ao rearranjar os termos de uma série condicionalmente convergente, podemos fazer com que a nova série convirja para qualquer número real pré-determinado, ou mesmo que divirja. Esse resultado notável é conhecido como Teorema de Riemann.

4.43 Definição Uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita **condicionalmente convergente** se ela converge, mas a série dos valores absolutos de seus termos, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, diverge.

4.44 Definição Uma **permutação** dos números naturais é uma bijeção do conjunto dos números naturais nele mesmo, isto é, uma função $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que é injetiva e sobrejetiva.

4.45 Exemplo A função $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$\sigma(k) = \begin{cases} k - 1 & \text{se } k \text{ é par} \\ k + 1 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é uma permutação dos naturais.

4.46 Definição Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série e σ é uma permutação dos números naturais, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde $b_n = a_{\sigma(n)}$, é dita um **rearranjo** da série original.

Teorema 4.47

4.47 Teorema Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente com soma L . Então, todo rearranjo dessa série também converge absolutamente e tem soma L .

Demonstração. Seja σ uma permutação dos números naturais e considere o rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde $b_n = a_{\sigma(n)}$. Primeiramente observamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ é uma série de termos não-negativos cujas somas parciais são limitadas superiormente por $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Demonstração do Teorema 4.47 (continuação)

Para mostrar que a soma do rearranjo é igual a L , consideremos as somas parciais $L_n = \sum_{k=1}^n a_k$ e $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, temos que $L_n \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N_1$, temos $|L_n - L| < \epsilon$. Também temos que existe N_2 tal que para $n > N_2$ temos que $\sum_{k=n}^{\infty} a_n < \epsilon$ pois $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Demonstração do Teorema 4.47 (continuação)

Como σ é uma bijeção, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(M)\}$$

contém todos os índices de 1 a $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, para $n \geq M$, as somas parciais B_n incluem todos os termos $a_1, a_2, \dots, a_N$, possivelmente em ordem diferente.

Podemos escrever:

$$B_n = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{i=1}^N a_i + \sum_{j \in J} a_j,$$

onde J é o conjunto de índices $j > N$ tais que $\sigma(k) = j$ para algum $k \leq n$.

Demonstração do Teorema 4.47 (conclusão)

Então,

$$B_n - L = \left(\sum_{i=1}^N a_i - L \right) + \sum_{j \in J} a_j.$$

Como $\left| \sum_{i=1}^N a_i - L \right| = |L_N - L| < \epsilon$ e $\left| \sum_{j \in J} a_j \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \epsilon$,
concluimos que $|B_n - L| < 2\epsilon$.

Assim, $B_n \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, a soma do rearranjo é igual a L .

4.48 Teorema Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos reais, vale que: 1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente, então ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergem. 2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem, e temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Demonstração do Teorema 4.48

Demonstração. 1. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, e sabendo que $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ não podem ambas convergir, pois isso implicaria na convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Como os termos a_n^+ e $-a_n^-$ são não negativos, e a soma de pelo menos uma delas diverge, ambas devem divergir.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem, pois seus termos são não negativos e menores ou iguais a $|a_n|$. Portanto, ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem, e a igualdade segue diretamente da definição de $a_n = a_n^+ + a_n^-$.

4.49 Teorema (Teorema do Rearranjo de Riemann) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente de termos reais e seja L um número real dado. Então, existe um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos termos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge para L .

Demonstração do Teorema 4.49

Demonstração. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente, as séries de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e de termos negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ambas divergem (para $+$ e $-$, respectivamente), onde:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Vamos construir um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que converge para L seguindo o procedimento a seguir:

Procedimento de Construção do Rearranjo

1. Seleccionamos termos positivos a_n^+ em ordem, somando-os até que a soma parcial exceda L . Seja p_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ > L.$$

2. Em seguida, adicionamos termos negativos a_n^- em ordem, somando-os até que a soma parcial fique abaixo de L . Seja q_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$S_2 = S_1 + \sum_{n=1}^{q_1} a_n^- < L.$$

3. Repetimos o processo: adicionamos mais termos positivos suficientes para que a soma parcial exceda L novamente, depois mais termos negativos para que a soma fique abaixo de L , e assim por diante.

Convergência do Rearranjo

Assim, construímos uma sequência de somas parciais S_k que alternam em torno de L . Como os termos a_n tendem a zero (pois $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge), a diferença $|S_k - L|$ diminui conforme avançamos no processo.

Mais precisamente, a diferença entre cada soma parcial e L é limitada pelo módulo do próximo termo a ser adicionado:

$$|S_k - L| \leq |a_{N_k}|,$$

onde N_k é o índice do último termo adicionado na k -ésima etapa. Como $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $|S_k - L| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, o rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge para L , conforme desejado. $\square$

Teorema do Rearranjo de Riemann

Agora, podemos demonstrar o Teorema do Rearranjo de Riemann.

Teorema 4.49 (Teorema do Rearranjo de Riemann) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente de termos reais e seja L um número real dado. Então, existe um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos termos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge para L .

Demonstração do Teorema de Riemann - Parte 1

Demonstração. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente, as séries de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e de termos negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ambas divergem (para $+$ e $-$, respectivamente), onde:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Vamos construir um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que converge para L seguindo o procedimento a seguir:

- 1 Seleccionamos termos positivos a_n^+ em ordem, somando-os até que a soma parcial exceda L . Seja p_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ > L.$$

- ② Em seguida, adicionamos termos negativos a_n^- em ordem, somando-os até que a soma parcial fique abaixo de L . Seja q_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$S_2 = S_1 + \sum_{n=1}^{q_1} a_n^- < L.$$

Demonstração do Teorema de Riemann - Parte 3

- 3 Repetimos o processo: adicionamos mais termos positivos suficientes para que a soma parcial exceda L novamente, depois mais termos negativos para que a soma fique abaixo de L , e assim por diante.

Assim, construímos uma sequência de somas parciais S_k que alternam em torno de L . Como os termos a_n tendem a zero (pois $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge), a diferença $|S_k - L|$ diminui conforme avançamos no processo.

Demonstração do Teorema de Riemann - Parte 4

Mais precisamente, a diferença entre cada soma parcial e L é limitada pelo módulo do próximo termo a ser adicionado:

$$|S_k - L| \leq |a_{N_k}|,$$

onde N_k é o índice do último termo adicionado na k -ésima etapa. Como $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $|S_k - L| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, o rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge para L , conforme desejado.