

Séries de funções e séries de potências

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Introdução

A ideia de aproximar uma função por uma sequência de funções simples, ou conhecidas, está no cerne de várias técnicas matemáticas, tanto teóricas quanto práticas. Por exemplo, para provar que uma equação diferencial tem uma solução, pode-se construir recursivamente uma sequência de funções aproximantes e mostrar que elas convergem para a solução requerida. Ao mesmo tempo, encontrar explicitamente os valores de tal solução pode não ser possível, nem mesmo por métodos analíticos, então uma ideia é adotar métodos numéricos, que podem fornecer funções aproximantes com uma forma particularmente simples, como polinômios por partes. Torna-se assim crucial ser capaz de decidir quando uma sequência de aplicações gera uma função limite, que tipo de convergência em direção ao limite temos e quais características das funções na sequência são herdadas pelo limite. Tudo isso será o conteúdo da primeira parte deste capítulo.

Sequências de funções

Seja X um subconjunto arbitrário da reta real. Suponha que haja uma aplicação real definida em X , que denotamos $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, para qualquer n maior ou igual a um certo $n_0 \geq 0$. A família $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ é dita **sequência de funções**. Exemplos são as famílias $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$ ou $f_n(x) = x^n$, $n \geq 0$, em $X = \mathbb{R}$.

Quanto às sequências numéricas, estamos interessados no estudo do comportamento de uma sequência de aplicações quando $n \rightarrow \infty$. O primeiro passo é analisar a sequência numérica dada pelos valores das aplicações f_n em cada ponto de X .

Convergência pontual

Definição 2.1 A sequência $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ converge pontualmente em $\bar{x} \in X$ se a sequência numérica $\{f_n(\bar{x})\}_{n \geq n_0}$ converge quando $n \rightarrow \infty$. O subconjunto $A \subseteq X$ de tais pontos $\bar{x}$ é chamado **conjunto de convergência pontual** da sequência $\{f_n\}_{n \geq n_0}$. Isso define uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in A.$$

Escreveremos $f_n \rightarrow f$ pontualmente em A , e falaremos da **função limite** f da sequência.

Note que f é a função limite da sequência se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad \forall x \in A.$$

Exemplos de convergência pontual

Exemplos 2.2

i) Seja $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$, em $X = \mathbb{R}$. Observando que $x + \frac{1}{n} \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$, e usando a continuidade do seno, temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x + \frac{1}{n}) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

portanto $A = X = \mathbb{R}$.

ii) Considere $f_n(x) = x^n$, $n \geq 0$, em $X = \mathbb{R}$; recordando (1.1) temos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

A sequência não converge para nenhum outro valor x , então $A = (-1, 1]$.

Limitações da convergência pontual

A noção de convergência pontual não é suficiente, em muitos casos, para transferir as propriedades das aplicações individuais f_n para a função limite f . Continuidade (mas também diferenciabilidade, ou integrabilidade) é um desses casos. Nos exemplos acima, as aplicações $f_n(x)$ são contínuas, mas a função limite é contínua no caso i), não no ii).

Convergência uniforme

Um requisito de convergência mais convincente, que garante que a continuidade seja passada para o limite, é a chamada convergência uniforme. Para entender a diferença com a convergência pontual, vamos tornar explícita a Definição 2.1. Esta afirma que para qualquer ponto $x \in A$ e qualquer $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $\bar{n}$ tal que

$$\forall n > \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Em geral, $\bar{n}$ depende não apenas de ε mas também de x , ou seja, $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x)$. Em outras palavras, o índice $\bar{n}$, após o qual os valores $f_n(x)$ aproximam $f(x)$ com uma margem menor que ε , pode variar de ponto a ponto.

Convergência Uniforme

Por exemplo, considere $f_n(x) = x^n$, com $0 < x < 1$; então a condição

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

vale para qualquer $n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$.

Portanto, o menor n para o qual a condição é válida tende ao infinito quando x se aproxima de 1. Logo, não há $\bar{n}$ dependendo apenas de ε e não de x .

Definição de convergência uniforme

A convergência é dita uniforme sempre que o índice $\bar{n}$ pode ser escolhido independentemente de x . Isso significa que, para qualquer $\varepsilon > 0$, deve existir um inteiro $\bar{n}$ tal que

$$\forall n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Usando a noção de supremo e ínfimo, e recordando que ε é arbitrário, podemos reformular da seguinte forma: para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $\bar{n}$ tal que

$$\forall n \geq \bar{n} \implies \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definição formal de convergência uniforme

Definição 2.3 A sequência $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ converge uniformemente em A para a função limite f se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dito de outra forma, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tal que

$$\forall n \geq \bar{n} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Escreveremos $f_n \rightarrow f$ uniformemente em A .

Vamos introduzir o símbolo

$$\|g\|_{\infty,A} = \sup_{x \in A} |g(x)|,$$

para uma aplicação limitada $g : A \rightarrow \mathbb{R}$; esta quantidade é variadamente chamada norma do infinito, norma do supremo, ou norma sup para abreviar. Uma definição alternativa de convergência uniforme é assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0. \quad (2.3)$$

Relação entre convergências

Claramente, a convergência uniforme de uma sequência é uma condição mais forte que a convergência pontual. Pela definição de norma sup, de fato,

$$\forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, A}$$

então se a norma à direita tende a 0, o valor absoluto à esquerda também tende. Portanto

Proposição 2.4 Se a sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge para f uniformemente em A , então converge pontualmente em A .

A recíproca é falsa, como mostram alguns exemplos.

Exemplos de convergência uniforme

Exemplos 2.5

i) A sequência $f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$, converge uniformemente para $f(x) = \sin x$ em $\mathbb{R}$. De fato, usando identidades trigonométricas conhecidas, temos, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sin \left(x + \frac{1}{n} \right) - \sin x \right| = 2 \left| \sin \frac{1}{2n} \right| \left| \cos \left(x + \frac{1}{2n} \right) \right| \leq 2 \sin \frac{1}{2n};$$

além disso, a igualdade é atingida para $x = -\frac{1}{2n}$, por exemplo. Portanto

$$\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sin \left(x + \frac{1}{n} \right) - \sin x \right| = 2 \sin \frac{1}{2n}$$

e passando ao limite para $n \rightarrow \infty$ obtemos o resultado.

Exemplos de convergência uniforme (continuação)

ii) Como já visto, $f_n(x) = x^n$, $n \geq 0$, não converge uniformemente em $I = [0, 1]$ para f definida em (2.1). Para qualquer $n \geq 0$, de fato, $\|f_n - f\|_{\infty, I} = \sup_{0 \leq x < 1} x^n = 1$. No entanto, a convergência é uniforme em todo subintervalo $I_a = [0, a]$, $0 < a < 1$, pois

$$\|f_n - f\|_{\infty, I_a} = \sup_{x \in [0, a]} |x^n - 0| = a^n \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, a sequência converge para zero uniformemente em I_a . Mais geralmente, pode-se mostrar que a sequência converge uniformemente para zero em qualquer intervalo $[-a, a]$, $0 < a < 1$.

Critério para convergência uniforme

O seguinte critério é imediato de verificar e útil para verificar convergência uniforme.

Proposição 2.6 Seja a sequência $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ convergente pontualmente em A para uma função f . Tome uma sequência numérica $\{M_n\}_{n \geq n_0}$, infinitesimal (converge a zero) para $n \rightarrow \infty$, tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in A.$$

Então $f_n \rightarrow f$ uniformemente em A .

A propriedade foi usada nos exemplos anteriores, com $M_n = 2 \sin \frac{1}{2n}$ para o caso i), e $M_n = a^n$ para ii).

Propriedades das sequências uniformemente convergentes

Como anunciado anteriormente, sob convergência uniforme a função limite herda a continuidade da sequência.

Teorema 2.7 Seja a sequência de aplicações contínuas $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ convergindo uniformemente para f no intervalo real I . Então f é contínua em I .

Este resultado pode ser usado para dizer que a convergência pontual nem sempre é uniforme. De fato, se a função limite não é contínua enquanto os termos individuais na sequência são, a convergência não pode ser uniforme.

Troca de limites e integrais

Suponha $f_n \rightarrow f$ pontualmente em $I = [a, b]$. Se as aplicações são integráveis, não é verdade, em geral, que

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplo 2.8 Seja $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ em $I = [0, 1]$. Então $f_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$, pontualmente em I . Portanto

$$\int_0^1 f(x) dx = 0;$$

por outro lado, pondo $\varphi(t) = te^{-t}$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \varphi(nx) n dx = \int_0^n \varphi(t) dt = -ne^{-n} + [-e^{-t}]_0^n \\ &= -ne^{-n} - e^{-n} + 1 \rightarrow 1 \quad \text{para } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Integrabilidade sob convergência uniforme

A convergência uniforme é uma condição suficiente para transferir a integrabilidade para o limite.

Teorema 2.9 Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado e $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ uma sequência de funções integráveis sobre I tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em I . Então f é integrável em I , e

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Note que (2.4) pode ser escrito como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

mostrando que a convergência uniforme permite trocar as operações de limite e integração.

Troca de limites e derivadas

Ao considerar limites de funções diferenciáveis, certas suposições sobre convergência uniforme garantem a diferenciabilidade do limite.

Teorema 2.10 Seja $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ uma sequência de funções C^1 sobre o intervalo $I = [a, b]$. Suponha que existam aplicações f e g em I tais que

- ① $f_n \rightarrow f$ pontualmente em I ;
- ② $f'_n \rightarrow g$ uniformemente em I .

Então f é C^1 em I , e $f' = g$. Além disso, $f_n \rightarrow f$ uniformemente em I (e claramente, $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente em I).

Sob as suposições do teorema, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)', \quad \forall x \in A,$$

então a convergência uniforme (das primeiras derivadas) permite trocar o limite e a derivada.

Observação 2.11 Um resultado mais geral, com demonstração similar, afirma que se uma sequência $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ de aplicações C^1 satisfaz estas duas propriedades:

- 1 existe um $x_0 \in [a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$;
- 2 a sequência $\{f'_n\}_{n \geq n_0}$ converge uniformemente em I para uma aplicação g (necessariamente contínua em I),

Observação sobre troca de limites e derivadas (continuação)

então, pondo

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

f_n converge uniformemente para f em I . Além disso, $f \in \mathcal{C}^1$ e $f'(x) = g(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$.

Observação 2.12 Um exemplo explicará por que a mera convergência pontual das derivadas não é suficiente para concluir como no teorema, mesmo no caso em que a sequência de funções converge uniformemente. Considere a sequência $f_n(x) = x - x^n/n$; ela converge uniformemente em $I = [0, 1]$ para $f(x) = x$ porque

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in I,$$

e portanto

$$\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Séries de funções e séries de potências

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Observação sobre troca de limites e derivadas (continuação)

então, pondo

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

f_n converge uniformemente para f em I . Além disso, $f \in \mathcal{C}^1$ e $f'(x) = g(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$.

Observação 2.12 Um exemplo explicará por que a mera convergência pontual das derivadas não é suficiente para concluir como no teorema, mesmo no caso em que a sequência de funções converge uniformemente. Considere a sequência $f_n(x) = x - x^n/n$; ela converge uniformemente em $I = [0, 1]$ para $f(x) = x$ porque

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in I,$$

e portanto

$$\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Séries de funções

Começando com uma sequência de funções $\{f_k\}_{k \geq k_0}$ definida em um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, podemos construir uma série de funções $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ de forma similar às sequências e séries numéricas. Precisamente, consideramos como a sequência de somas parciais

$$s_n(x) = \sum_{k=k_0}^n f_k(x)$$

se comporta quando $n \rightarrow \infty$. Diferentes tipos de convergência podem ocorrer.

Definição 2.13 A série de funções $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge pontualmente em $\bar{x}$ se a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ converge pontualmente em $\bar{x}$; equivalentemente, a série numérica $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(\bar{x})$ converge.

Convergência pontual de séries de funções

Seja $A \subseteq X$ o conjunto de tais pontos $\bar{x}$, chamado de **conjunto de convergência pontual** de $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$; temos assim definido a função $s : A \rightarrow \mathbb{R}$, chamada **soma**, por

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x), \quad \forall x \in A.$$

A convergência pontual de uma série de funções pode ser estudada usando em cada ponto $x \in X$ o que já sabemos sobre séries numéricas. Em particular, a sequência $\{f_k(x)\}_{k \geq k_0}$ deve ser infinitesimal, quando $k \rightarrow \infty$, para que x pertença a A . Além disso, os critérios de convergência vistos no capítulo anterior podem ser aplicados, em cada ponto.

Convergência absoluta e uniforme

Definição 2.14 A série de funções $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge absolutamente em A se para qualquer $x \in A$ a série $\sum_{k=k_0}^{\infty} |f_k(x)|$ converge.

Definição 2.15 A série de funções $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente para a função s em A se a sequência de somas parciais $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ converge uniformemente para s em A .

Tanto a convergência absoluta (devido ao Teorema 1.24) quanto a convergência uniforme (Proposição 2.4) implicam a convergência pontual da série. Não há implicações lógicas entre convergência uniforme e absoluta, no entanto.

Exemplo 2.16

A série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nada mais é do que a série geométrica do Exemplo 1.3 onde q é tomado como variável independente e renomeado x . Assim, a série converge pontualmente para a soma $s(x) = \frac{1}{1-x}$ em $A = (-1, 1)$; no mesmo conjunto há também convergência absoluta. Quanto à convergência uniforme, ela vale em todo intervalo fechado $[-a, a]$ com $0 < a < 1$.

Exemplo 2.16 (continuação)

De fato,

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| \leq \frac{a^{n+1}}{1 - a},$$

onde usamos o fato de que $|x| \leq a$ implica $1 - a \leq 1 - x$. Além disso, a sequência $M_n = \frac{a^{n+1}}{1-a}$ tende a 0 quando $n \rightarrow \infty$, e o resultado segue. $\square$

Teoremas para séries de funções

É claro a partir das definições dadas que os Teoremas 2.7, 2.9 e 2.10 podem ser formulados para séries de funções, então os reformulamos por completeza.

Teorema 2.17 Seja $\{f_k\}_{k \geq k_0}$ uma sequência de aplicações contínuas em um intervalo real I tal que a série $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente para uma função s em I . Então s é contínua em I .

Teorema 2.18 (Integração por séries) Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado e $\{f_k\}_{k \geq k_0}$ uma sequência de funções integráveis em I tal que $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente para uma função s em I . Então s é integrável em I , e

$$\int_a^b s(x) dx = \int_a^b \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx. \quad (2.5)$$

Isto é formulado alternativamente dizendo que a série é integrável termo a termo.

Teoremas para séries de funções (continuação)

Teorema 2.19 (Diferenciação de séries) Seja $\{f_k\}_{k \geq k_0}$ uma sequência de aplicações $\mathcal{C}^1$ em $I = [a, b]$. Suponha que existam aplicações s e t em I tais que

i) $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x) = s(x), \quad \forall x \in I;$

ii) $\sum_{k=k_0}^{\infty} f'_k(x) = t(x), \quad \forall x \in I$ e a convergência é uniforme em I .

Então $s \in \mathcal{C}^1(I)$ e $s' = t$. Além disso, $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente para s em I (e $\sum_{k=k_0}^{\infty} f'_k$ converge uniformemente para s').

Diferenciação termo a termo

Isto é dizer,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f'_k(x) = \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x) \right)', \quad \forall x \in I,$$

e a série é diferenciável termo a termo.

A importância da convergência uniforme deve estar clara agora. Mas verificar a convergência uniforme é outra questão, muitas vezes longe de ser fácil. Usar a definição requer conhecer a soma, e como vimos com séries numéricas, a soma nem sempre é computável explicitamente. Por esta razão provaremos uma condição suficiente para garantir a convergência uniforme de uma série, mesmo sem conhecer sua soma antecipadamente.

Teste M de Weierstrass

Teorema 2.20 (Teste M de Weierstrass) Seja $\{f_k\}_{k \geq k_0}$ uma sequência de aplicações em X e $\{M_k\}_{k \geq k_0}$ uma sequência de números reais tal que, para qualquer $k \geq k_0$,

$$|f_k(x)| \leq M_k, \quad \forall x \in X.$$

Assuma que a série numérica

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k \text{ converge. Então a série } \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k \text{ converge uniformemente em } X.$$

Demonstração. Fixe $x \in X$, de modo que a série numérica

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |f_k(x)| \text{ converge pelo Teste de Comparação, e portanto a soma}$$

$$s(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x), \quad \forall x \in X,$$

está bem definida.

Demonstração do Teste M (continuação)

Basta verificar se as somas parciais $\{s_n\}_{n \geq k_0}$ convergem uniformemente para s em X . Mas para qualquer $x \in X$,

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k,$$

ou seja,

$$\sup_{x \in X} |s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Demonstração do Teste M (continuação)

Como a série

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k$$

converge, o lado direito é apenas o n -ésimo resto de uma série convergente, que vai para 0 quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração do Teste M (continuação)

Em conclusão,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |s_n(x) - s(x)| = 0$$

então

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$$

converge uniformemente em X .

Exemplo 2.21

Queremos entender a convergência uniforme e pontual de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^4 x}{k\sqrt{k}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note

$$\left| \frac{\sin k^4 x}{k\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

podemos então usar o teste M com $M_k = \frac{1}{k\sqrt{k}}$, já que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

converge (é harmônica generalizada de expoente $3/2$). Portanto a série dada converge uniformemente, logo também pontualmente, em $\mathbb{R}$.

Séries de potências

Séries de potências são séries muito especiais em que as aplicações f_k são polinômios. Mais precisamente,

Definição 2.22 Fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ e seja $\{a_k\}_{k \geq 0}$ uma sequência numérica. Chama-se série de potências uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \quad (2.6)$$

O ponto x_0 é dito centro da série e os números $\{a_k\}_{k \geq 0}$ são os coeficientes da série.

A série converge em seu centro, independentemente dos coeficientes. Os próximos três exemplos esgotam os possíveis tipos de conjunto de convergência de uma série. Mostraremos que tal conjunto é sempre um intervalo (possivelmente reduzido ao centro).

Séries de funções e séries de potências

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Séries de potências

Séries de potências são séries muito especiais em que as aplicações f_k são polinômios. Mais precisamente,

Definição 2.22 Fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ e seja $\{a_k\}_{k \geq 0}$ uma sequência numérica. Chama-se série de potências uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \quad (2.6)$$

O ponto x_0 é dito centro da série e os números $\{a_k\}_{k \geq 0}$ são os coeficientes da série.

A série converge em seu centro, independentemente dos coeficientes. Os próximos três exemplos esgotam os possíveis tipos de conjunto de convergência de uma série. Mostraremos que tal conjunto é sempre um intervalo (possivelmente reduzido ao centro).

Exemplos 2.23

i) A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k = x + 4x^2 + 27x^3 + \dots$$

converge apenas em $x = 0$; de fato, em qualquer outro $x \neq 0$ o termo geral $k^k x^k$ não é infinitesimal, então a condição necessária para convergência não é cumprida (Propriedade 1.6).

ii) Considere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$$

(2.7) é conhecida como série exponencial, porque soma para a função $s(x) = e^x$. Este fato será provado mais tarde no Exemplo 2.46 i). A série exponencial converge para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De fato, com um dado $x \neq 0$, o Teste da Razão para séries numéricas (Teorema 1.14) garante convergência:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Exemplos 2.23 (continuação)

iii) Outro exemplo familiar é a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

(recordar Exemplo 2.16). Já sabemos que converge, para $x \in (-1, 1)$, para a função $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

Em todos os exemplos a série converge (absolutamente) em um intervalo simétrico em relação ao centro (a origem, nos casos específicos). Veremos que o conjunto de convergência A de qualquer série de potências, independentemente dos coeficientes, é ou um intervalo limitado (aberto, fechado ou semiaberto) centrado em x_0 , ou todo $\mathbb{R}$.

Começamos por séries centradas na origem; esta não é uma restrição real, porque a substituição $y = x - x_0$ permite reduzir a esse caso.

Antes disso, porém, precisamos de um resultado técnico, consequência direta do Teste de Comparação para séries numéricas (Teorema 1.10), que será muito útil para séries de potências.

Proposição 2.24

Proposição 2.24 Se a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \bar{x} \neq 0$$

, tem termos limitados, em particular se converge, então a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

converge absolutamente para qualquer x tal que $|x| < |\bar{x}|$.

Demonstração. Como $a_k \bar{x}^k$ é limitado, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|a_k \bar{x}^k| \leq M, \quad \forall k \geq 0.$$

Para qualquer x com $|x| < |\bar{x}|$ então,

$$|a_k x^k| = \left| a_k \bar{x}^k \left(\frac{x}{\bar{x}} \right)^k \right| \leq M \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^k, \quad \forall k \geq 0.$$

Exemplo 2.25

A série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k+1} x^k$ tem termos limitados quando $x = \pm 1$, pois $\left| \frac{k-1}{k+1} \right| \leq 1$ para qualquer $k \geq 0$. A proposição acima força convergência quando $|x| < 1$. A série não converge quando $|x| \leq 1$ porque, no caso $x = \pm 1$, o termo geral não é infinitesimal.

Corolário 2.26

A Proposição 2.24 tem uma consequência imediata, mas crucial.

Corolário 2.26 Se uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge em $x_1 \neq 0$, converge absolutamente no intervalo aberto $(-|x_1|, |x_1|)$; se não converge em $x_2 \neq 0$, não converge em nenhum lugar ao longo das semi-retas $(|x_2|, +\infty)$ e $(-\infty, -|x_2|)$.

O enunciado é ilustrado na Fig. 2.2, para $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$.

Agora estamos em posição de provar que o conjunto de convergência de uma série de potências é um intervalo simétrico, extremos excluídos.

Figura: Ilustração do Corolário 2.26

Teorema 2.27

Teorema 2.27 Dada uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, apenas uma das seguintes holds: a) a série converge apenas em $x = 0$; b) a série converge pontualmente e absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$; além disso, converge uniformemente em todo intervalo fechado e limitado $[a, b]$; c) existe um único número real $R > 0$ tal que a série converge pontualmente e absolutamente para qualquer $|x| < R$, e uniformemente em todos os intervalos $[a, b] \subset (-R, R)$. Além disso, a série não converge em $|x| > R$.

Demonstração. Seja A o conjunto de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Se $A = \{0\}$, temos o caso a). O caso b) ocorre se $A = \mathbb{R}$. De fato, o Corolário 2.26 diz que a série converge pontualmente e absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Quanto à convergência uniforme em $[a, b]$, ponha $L = \max(|a|, |b|)$. Então

$$|f_k(x)| = |a_k x^k| \leq |a_k L^k|, \quad \forall x \in [a, b];$$

e podemos usar o teste M de Weierstrass 2.20 com $M_k = |a_k| L^k$. Agora suponha que A contém pontos além de 0 mas é menor que toda a reta, então há um $\bar{x} \notin A$. O Corolário 2.26 diz que A não pode conter nenhum

Definição 2.28 Chama-se raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ o número

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge} \right\}.$$

Voltando ao Teorema 2.27, notamos que $R = 0$ no caso a); no caso b), $R = +\infty$, enquanto no caso c), R é precisamente o número real estritamente positivo do enunciado.

Exemplos 2.29

Voltemos aos Exemplos 2.23. i) A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$$

tem raio de convergência $R = 0$. ii) Para

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

o raio é $R = +\infty$. iii) A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

tem raio $R = 1$.

Cuidado que o teorema não diz nada sobre o comportamento em $x = \pm R$: a série pode convergir em ambas as extremidades, em apenas uma, ou em nenhuma, como nos próximos exemplos.

Exemplos 2.30

i) A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

converge em $x = \pm 1$ (harmônica generalizada de expoente 2 para $x = 1$, alternada para $x = -1$). Não converge em $|x| > 1$, pois o termo geral não é infinitesimal. Assim $R = 1$ e $A = [-1, 1]$. ii) A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

converge em $x = -1$ (série harmônica alternada) mas não em $x = 1$ (série harmônica). Portanto $R = 1$ e $A = [-1, 1]$. iii) A série geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

converge apenas em $A = (-1, 1)$ com raio $R = 1$.

Teorema de Abel

Convergência em uma extremidade garante que a série converge uniformemente em intervalos fechados contendo essa extremidade.

Precisamente, temos

Teorema 2.31 (Abel) Suponha $R > 0$ finito. Se a série converge em $x = R$, então a convergência é uniforme em todo intervalo $[a, R] \subset (-R, R]$. A afirmação análoga vale se a série converge em $x = -R$.

Séries centradas em ponto arbitrário

Se agora centrarmos uma série de potências em um x_0 genérico, os resultados anteriores leem-se como segue. O raio R é 0 se e somente se

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

converge apenas em x_0 , enquanto $R = +\infty$ se e somente se a série converge em qualquer x em $\mathbb{R}$. No caso restante R é positivo e finito, e o Teorema 2.27 diz que o conjunto A de convergência satisfaz

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\} \subseteq A \subseteq \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq R\}.$$

A importância de determinar o raio de convergência é evidente. Os próximos dois critérios, consequências fáceis dos Testes da Razão e da Raiz análogos para séries numéricas, dão uma resposta bastante simples mas útil.

Teste da Razão para séries de potências

Teorema 2.32 (Teste da Razão) Dada a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

com $a_k \neq 0$ para todo $k \geq 0$, se o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell$$

existe, o raio de convergência R é dado por

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty, \\ +\infty & \text{se } \ell = 0, \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } 0 < \ell < +\infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Demonstração. Por simplicidade suponha $x_0 = 0$, e seja $x \neq 0$. A afirmação segue pelo Teste da Razão 1.14 pois

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x| = \ell |x|.$$

Teste da Raiz para séries de potências

Teorema 2.33 (Teste da Raiz) Dada a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

se o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell$$

existe, o raio R é dado pela fórmula (2.8).

A demonstração, deixada ao leitor, baseia-se no Teste da Raiz 1.15 e segue as mesmas linhas.

Exemplos 2.34

i) A série $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ tem raio $R = 1$, porque $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$; não converge para $x = 1$ nem para $x = -1$.

ii) Considere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$$

e use o Teste da Razão:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-k} = e^{-1}.$$

O raio é assim $R = e$.

Exemplos 2.34 (continuação)

iii) Para estudar

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{(k-1)(k+2)} (x-2)^{2k}$$

ponha $y = (x-2)^2$ e considere a série de potências em y

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{(k-1)(k+2)} y^k$$

centrada na origem. Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{2k+1}{(k-1)(k+2)}} = 1$$

o raio é 1. Para $y = 1$ a série (2.10) reduz-se a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{(k-1)(k+2)},$$

Exemplos 2.34 (continuação)

que diverge como a série harmônica $\frac{2k+1}{(k-1)(k+2)} \sim \frac{2}{k}$, $k \rightarrow \infty$, enquanto para $y = -1$ a série (2.10) converge (pelo Teste de Leibniz 1.20). Em resumo, (2.10) converge para $-1 \leq y < 1$.

Voltando à variável x , isso significa $-1 \leq (x - 2)^2 < 1$. A desigualdade esquerda é sempre verdadeira, enquanto a direita vale para $-1 < x - 2 < 1$.

Então, a série (2.9) tem raio $R = 1$ e converge no intervalo $(1,3)$ (note que o centro é $x_0 = 2$).

Exemplos 2.34 (Continuação)

iv) A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k!} = x + x + x^2 + x^6 + x^{24} + \dots$$

é uma série de potências onde infinitos coeficientes são 0, e não podemos substituir como fizemos antes; em tais casos os critérios mencionados não se aplicam, e é mais conveniente usar diretamente o Teste da Razão ou da Raiz para séries numéricas. No caso em questão

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(k+1)!}}{x^{k!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x|^{(k+1)! - k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} |x|^{k!k} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1, \\ +\infty & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Assim $R = 1$. A série não converge nem para $x = 1$, nem para $x = -1$.

Exemplo 2.34 (Continuação)

v) Considere, para $\alpha \in \mathbb{R}$, a série binomial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ a série é na verdade uma soma finita, e a fórmula binomial de Newton (Vol. I, Eq. (1.13)) nos diz que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n,$$

daí o nome.

Exemplo 2.34 (Continuação)

Estudemos então para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e observe

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\alpha)}{(k+1)!} \right| &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)!}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)!} \right| = \\ &= \left| \frac{\alpha - k!}{k+1} \right|; \end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha)}{(k+1)!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - k!}{k+1} \right| = 1$$

e a série tem raio $R = 1$. A série não converge em $x = 1$ nem em $x = -1$ porque o termo geral não tende a 0 para $k \rightarrow \infty$.

As operações de soma e produto de dois polinômios estendem-se de maneira natural a séries de potências centradas no mesmo ponto x_0 ; o problema permanece de determinar o raio de convergência da série resultante. Isto é abordado nos próximos teoremas, onde x_0 será 0 por simplicidade.

Teorema 2.35 Dadas $\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, de raios respectivos R_1, R_2 , sua soma $\Sigma = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$ tem raio R satisfazendo $R \geq \min(R_1, R_2)$. Se $R_1 \neq R_2$, necessariamente $R = \min(R_1, R_2)$.

Demonstração. ~ Exercício.

No caso $R_1 = R_2$, o raio R pode ser estritamente maior que ambos R_1, R_2 devido a possíveis cancelamentos de termos na soma.

Exemplo 2.36

As séries

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{4^k - 2^k} x^k \quad \text{e} \quad \Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2^k}{4^k + 2^k} x^k$$

têm o mesmo raio $R_1 = R_2 = 2$. Sua soma

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4^k - 1} x^k,$$

no entanto, tem raio $R = 4$.

Produto de séries de potências

O produto de duas séries é definido de modo a preservar a propriedade distributiva da soma em relação à multiplicação. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (2.11)$$

onde

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Esta regra de multiplicação é chamada produto de Cauchy: pondo $x = 1$ retorna precisamente o produto de Cauchy (1.9) de séries numéricas. Então temos o seguinte resultado.

Teorema do produto de Cauchy

Teorema 2.37 Dadas $\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, de raios respectivos R_1, R_2 , seu produto de Cauchy tem raio de convergência $R \geq \min(R_1, R_2)$.

Passemos a considerar a regularidade da soma de uma série de potências. Já observamos que as funções $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$ são polinômios C^∞ sobre todo $\mathbb{R}$.

Em particular elas são contínuas e sua soma $s(x)$ é contínua, onde definida (usando o Teorema 2.17), porque a convergência é uniforme em intervalos fechados no conjunto de convergência.

Vejamos em detalhe como a diferenciação e integração termo a termo se encaixam com séries de potências.

Para clareza assumimos $x_0 = 0$ e começamos com um pequeno fato técnico.

Lema 2.38

Lema 2.38 As séries $\sum_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$ têm o mesmo raio de convergência.

Demonstração. Chame R_1, R_2 os raios de $\sum_1, \sum_2$ respectivamente. Claramente $R_2 \leq R_1$ (pois $|a_k x^k| \leq |k a_k x^k|$). Por outro lado, se $|x| < R_1$ e $\bar{x}$ satisfaz $|x| < \bar{x} < R_1$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{x}^k$ converge e então $|a_k| \bar{x}^k$ é limitado superiormente por uma constante $M > 0$ para qualquer $k \geq 0$. Logo

$$|k a_k x^k| = k |a_k| \bar{x}^k \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^k \leq M k \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^k.$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{x}{\bar{x}} \right)^k$ é convergente (Exercício), pelo Teste de Comparação 1.10 também $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$ converge, donde $R_1 \leq R_2$. Em conclusão $R_1 = R_2$ e a afirmação está provada.

A série $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ é a série das derivadas de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Teorema 2.39 Suponha que o raio R da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ seja positivo, finito ou infinito.

Teorema 2.39 (continuação)

Então a) a soma s é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ sobre $(-R, R)$. Além disso, a n -ésima derivada de s sobre $(-R, R)$ pode ser computada diferenciando $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ termo a termo n vezes. Em particular, para qualquer $x \in (-R, R)$

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k;$$

(2.12) b) para qualquer $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

(2.13)

Prova do Teorema 2.39

Demonstração. a) Pelo lema anterior, uma série de potências e sua série das derivadas têm raios idênticos, porque $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$ para qualquer $x \neq 0$. A série das derivadas converge uniformemente em todo intervalo $[a, b] \subset (-R, R)$; assim o Teorema 2.19 aplica-se, e concluímos que s é $\mathcal{C}^1$ sobre $(-R, R)$ e que (2.12) vale. Iterando o argumento prova a afirmação.

b) O resultado segue imediatamente notando que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ é a série das derivadas de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$. Estas duas têm o mesmo raio e podemos usar o Teorema 2.18.

Exemplo 2.40

Diferenciando termo a termo

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

(2.14) inferimos que para $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(2.15)

Integrando termo a termo a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1, 1),$$

obtida de (2.14) trocando x por $-x$, temos para todo $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \log(1+x).$$

(2.16)