

Números e Sequências

Princípio de Indução

Cristian Coletti

CMCC - UFABC

Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O menor conjunto indutivo. Fundamenta o raciocínio por indução.

Conjuntos Numéricos

Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O menor conjunto indutivo. Fundamenta o raciocínio por indução.

Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

- Números naturais + opostos + zero
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Conjuntos Numéricos

Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O menor conjunto indutivo. Fundamenta o raciocínio por indução.

Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

- Números naturais + opostos + zero
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Teorema

A soma, diferença ou produto de dois inteiros é um inteiro.
O quociente de inteiros não é necessariamente inteiro.

Números Racionais e Irracionais

Definição (Números Racionais ($\mathbb{Q}$))

Quociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$)

Números Racionais e Irracionais

Definição (Números Racionais ($\mathbb{Q}$))

Quociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$)

Propriedades

- $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{Z}$ como subconjunto
- $\mathbb{Q}$ verifica todos os axiomas de corpo e de ordem
- $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado

Números Racionais e Irracionais

Definição (Números Racionais ($\mathbb{Q}$))

Quociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$)

Propriedades

- $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{Z}$ como subconjunto
- $\mathbb{Q}$ verifica todos os axiomas de corpo e de ordem
- $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado

Definição (Números Irracionais)

Números reais que não pertencem a $\mathbb{Q}$

Números Racionais e Irracionais

Definição (Números Racionais ($\mathbb{Q}$))

Quociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$)

Propriedades

- $\mathbb{Q}$ contém $\mathbb{Z}$ como subconjunto
- $\mathbb{Q}$ verifica todos os axiomas de corpo e de ordem
- $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado

Definição (Números Irracionais)

Números reais que não pertencem a $\mathbb{Q}$

Exercício

Mostre que $\mathbb{Q}$ é o menor corpo contido em $\mathbb{R}$.

1.5 Indução Matemática

Método de Prova

Permite demonstrar que uma afirmação é verdadeira para todos os números naturais.

Estrutura da Prova

- 1 **Caso Inicial:** Demonstrar para $n = n_0$ (geralmente 0 ou 1)
- 2 **Passo Indutivo:** Supor válido para $n = k$ e provar para $n = k + 1$

Analogia do Dominó

- Primeira peça cai (caso base)
- Se uma peça n cai, a próxima $n + 1$ também cai
- Então todas as peças caem

Exemplo 1.35: Soma dos Primeiros n Naturais

Proposição

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Caso Inicial ($n = 1$).

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$



Passo Indutivo.

$$\text{Hipótese: } P(k) : 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\text{Provar: } P(k+1) : 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

1.36 Teorema (Princípio da Indução Matemática)

Teorema

Seja S um conjunto de números naturais com:

- ① $1 \in S$
- ② Se $k \in S$ então $k + 1 \in S$

Então S contém todos os números naturais.

Demonstração.

As propriedades 1 e 2 mostram que S é um conjunto indutivo.

Como $\mathbb{N}$ é o menor conjunto indutivo, $\mathbb{N} \subseteq S$.

Portanto, S contém todos os números naturais. □

Exemplo 1.37: $2^n \geq 1 + n$

Proposição

$P(n) : 2^n \geq 1 + n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Caso Inicial ($n = 0$).

$$2^0 = 1 \geq 1 + 0 = 1 \quad \checkmark$$



Passo Indutivo.

Hipótese: $2^k \geq 1 + k$

Provar: $2^{k+1} \geq 1 + (k + 1)$

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &\geq 2 \cdot (1 + k) \quad (\text{por hipótese}) \\ &= 2 + 2k \end{aligned}$$

Exemplo 1.38: Desigualdade de Bernoulli

Teorema

Em todo corpo ordenado $\mathbb{K}$, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, então:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Por indução em n .

- $n = 1$: $(1 + x)^1 = 1 + 1 * x \checkmark$
- Passo: Hipótese: $(1 + x)^k \geq 1 + kx$
Provar: $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$



Demonstração.

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x) \\ &\geq (1+kx)(1+x) \quad (\text{por hipótese e } 1+x \geq 0) \\ &= 1+x+kx+kx^2 \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x \quad (\text{pois } kx^2 \geq 0) \quad \checkmark\end{aligned}$$



1.39 Definição: Máximo de um Conjunto

Definição

Dizemos que $m \in X$ é o máximo de X se $m \geq x$ para todo $x \in X$.

Propriedades

- O máximo, quando existe, é único
- Denotado por $\max X$

1.40 Teorema: Todo conjunto finito não vazio tem máximo

Teorema

Todo conjunto finito não vazio possui um máximo.

Por indução no número de elementos.

- $n = 1$: O único elemento é o máximo ✓
- Passo: Suponha verdadeiro para conjuntos com k elementos
- Seja Y com $k + 1$ elementos
- Escolha $y_1 \in Y$ e seja $Y' = Y \setminus \{y_1\}$
- Por hipótese, Y' tem máximo m
- Compare m e y_1 :
 - Se $y_1 \leq m$ então m é máximo de Y
 - Se $y_1 > m$ então y_1 é máximo de Y

✓



1.41 Teorema: Princípio da Boa Ordem

Teorema

Todo conjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Por contrapositiva e indução.

Seja $T \subseteq \mathbb{N}$ não vazio.

Mostraremos que se T não tem elemento mínimo, então $T = \emptyset$.

Seja $S = \mathbb{N} \setminus T$.

- $n = 1$: Se $1 \in T$, seria o menor. Logo $1 \notin T \Rightarrow 1 \in S \checkmark$
- Passo: Suponha $n \in S$
 - Se algum $1, \dots, n$ estivesse em T , seria o menor
 - Logo nenhum de $1, \dots, n$ está em T
 - Se $n + 1 \in T$, seria o menor
 - Logo $n + 1 \notin T \Rightarrow n + 1 \in S \checkmark$

Portanto, $S = \mathbb{N} \Rightarrow T = \emptyset$.



1.6 Funções Definidas Recursivamente

Método Recursivo

- Valor inicial para f em $n = 1$
- Assume f definida para $k = 1, \dots, n$
- Valor de $f(n + 1)$ em termos de $f(k), k \leq n$

Definição (1.42 Sequência Real)

Função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Notação: $s_n := s(n)$

Exemplo: Sequência Definida Recursivamente

Definição

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \text{ para } n > 1$$

Primeiros Termos

$$a_1 = \sqrt{2} \approx 1.41421$$

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} \approx 1.68179$$

$$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \approx 1.83401$$

$$a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \approx 1.91521$$

Forma Geral

$$a_n = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdots \sqrt{2}}}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ raízes}}$

Duas Partes

- 1 Definição do primeiro termo (a_1)
- 2 Definição do termo a_n em função de a_{n-1}

Analogia com Indução

Este procedimento se assemelha à estrutura da demonstração por indução.

Definição Recursiva

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2$$

Primeiros Termos

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...)

Problema dos Coelhos

- Proposto por Fibonacci (1175-1250)
- "Um homem tem um casal de coelhos. Desejamos saber quantos casais de coelhos podem ser gerados deste par, se a cada mês um casal fértil gera um novo casal e cada casal novo se torna fértil quando completa dois meses de vida."
- A sequência (f_n) descreve o número de casais após n meses

Definição Informal

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$$

Definição (1.43 Definição Formal)

A função fatorial $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaz:

- 1 $f(1) = 1$
- 2 $f(n) = n \cdot f(n - 1)$ para todo $n > 1$

Exemplos

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{s=0}^4 (2s + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$\sum_{j=2}^5 j^j = 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$$

Soma Geral

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

Definição (1.44)

Dada uma sequência a_k de números reais, definimos o somatório $\sum_{k=1}^n a_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

- 1 $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$
- 2 $\sum_{k=1}^n a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ para todo $n > 1$

Teorema

Seja A um conjunto não vazio e $g : \mathbb{N} \times A \rightarrow A$. Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ satisfazendo:

- 1 $f(1) = a$, com $a \in A$
- 2 $f(n) = g(n, f(n-1))$ para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Demonstração do Princípio da Recursão

Existência.

Por indução sobre n :

- $f(1) = a$ está bem definida
- Suponha $f(n)$ bem definida
- Então $f(n+1) = g(n+1, f(n))$ está bem definida



Demonstração do Princípio da Recursão

Existência.

Por indução sobre n :

- $f(1) = a$ está bem definida
- Suponha $f(n)$ bem definida
- Então $f(n+1) = g(n+1, f(n))$ está bem definida



Unicidade.

Por indução sobre n :

- $f(1) = a = f'(1)$
- Suponha $f(n-1) = f'(n-1)$
- Então $f(n) = g(n, f(n-1)) = g(n, f'(n-1)) = f'(n)$



Função Fatorial

- $A = \mathbb{N}$
- $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $g(a, b) = a \cdot b$
- $f(1) = 1$
- $f(n) = g(n, f(n-1)) = n \cdot f(n-1)$

Axioma de Completude, Supremo e Ínfimo

Cristian F Coletti

CMCC - UFABC

Axioma de Completude

- Os doze axiomas apresentados abrangem todas as propriedades dos números reais que são estudadas na álgebra elementar.

Axioma de Completude

- Os doze axiomas apresentados abrangem todas as propriedades dos números reais que são estudadas na álgebra elementar.
- Existe um décimo terceiro axioma, de importância crucial para o Cálculo, que normalmente não é abordado nos cursos básicos de álgebra.

Axioma de Completude

- Os doze axiomas apresentados abrangem todas as propriedades dos números reais que são estudadas na álgebra elementar.
- Existe um décimo terceiro axioma, de importância crucial para o Cálculo, que normalmente não é abordado nos cursos básicos de álgebra.
- Quando passamos ao Cálculo, precisamos de um conceito mais avançado, que é "uma espécie de continuidade dos números reais".

Axioma de Completude

- Os doze axiomas apresentados abrangem todas as propriedades dos números reais que são estudadas na álgebra elementar.
- Existe um décimo terceiro axioma, de importância crucial para o Cálculo, que normalmente não é abordado nos cursos básicos de álgebra.
- Quando passamos ao Cálculo, precisamos de um conceito mais avançado, que é "uma espécie de continuidade dos números reais".
- Esse conceito envolve a completude dos números reais, o que significa intuitivamente que não existem "lacunas" entre os números reais.

- Os números irracionais aparecem na álgebra elementar quando buscamos resolver certas equações quadráticas.
- Um exemplo é a determinação de um número real x tal que $x^2 = 2$.
- A partir dos doze axiomas mencionados, não podemos provar a existência de tal x em $\mathbb{R}$, pois esses axiomas também são satisfeitos em $\mathbb{Q}$, onde não há nenhum número racional cujo quadrado seja 2.
- O que falta, dito de modo ainda impreciso, é a propriedade da *continuidade*.

Proposição Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.

Proposição Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.

Demonstração. Para demonstrar isso, seguiremos a "redução ao absurdo": negando a tese, chegamos a uma contradição, o que nos permite concluir que a tese deve ser de fato verdadeira.

Proposição Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.

Demonstração. Para demonstrar isso, seguiremos a "redução ao absurdo": negando a tese, chegamos a uma contradição, o que nos permite concluir que a tese deve ser de fato verdadeira.

- Tomemos então um número racional q tal que $q^2 = 2$ (note que estamos negando a tese de que tal número não existe). Como q é um número racional, devem existir número inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$, primos entre si, tais que $q = \frac{n}{m}$.

Proposição Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.

Demonstração. Para demonstrar isso, seguiremos a "redução ao absurdo": negando a tese, chegamos a uma contradição, o que nos permite concluir que a tese deve ser de fato verdadeira.

- Tomemos então um número racional q tal que $q^2 = 2$ (note que estamos negando a tese de que tal número não existe). Como q é um número racional, devem existir número inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$, primos entre si, tais que $q = \frac{n}{m}$.
- Como $q^2 = 2$, tem-se que $n^2 = 2m^2$. Como o membro à direita é par, assim deve ser n^2 . Logo, n é par ($\because$ um número inteiro e seu quadrado têm a mesma paridade).

- Podemos então escrever $n = 2k$ para um certo inteiro k , obtendo

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

- Mas isso significa que $m^2 = 2k^2$ é par, e portanto m também é par. Logo, o número 2 é um divisor comum de n e m , contradizendo o fato de que tais números são primos entre si.
- A hipótese de existência de um número racional q cujo quadrado é igual a 2 leva a uma contradição. Disso, concluímos que tal racional não existe, provando assim a proposição. $\square$

Iremos apresentar alguns conceitos preliminares intimamente ligados a tal axioma.

Definição Seja $A \subset \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio. Dizemos que A é *limitado superiormente*, se existe um número real x tal que

$$a \leq x \quad \forall a \in A$$

Observação Caso exista tal número x , este é chamado de *majorante* ou *cota superior* do conjunto A . Note que no caso em que A possua alguma cota superior, possuirá infinitas cotas superiores.

Definição De modo similar, dizemos que A é *limitado inferiormente* se existir algum número real y tal que

$$y \leq a \quad \forall a \in A$$

Tal número y , caso exista, é chamado de *minorante* ou *cota inferior*.

Exemplos

Sejam $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$.

Sejam $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$.

- O conjunto A possui minorantes (qualquer número não positivo é um minorante de A), mas não possui cotas superior, i.e. A é um conjunto limitado inferiormente, mas não superiormente.

Sejam $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$.

- O conjunto A possui minorantes (qualquer número não positivo é um minorante de A), mas não possui cotas superior, i.e. A é um conjunto limitado inferiormente, mas não superiormente.
- O conjunto B não possui nem minorantes nem cotas (não é limitado).

Sejam $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\}$.

- O conjunto A possui minorantes (qualquer número não positivo é um minorante de A), mas não possui cotas superior, i.e. A é um conjunto limitado inferiormente, mas não superiormente.
- O conjunto B não possui nem minorantes nem cotas (não é limitado).
- Já o conjunto C é limitado inferiormente e superiormente (qualquer número menor ou igual a 1 é um minorante, qualquer número maior ou igual a 3 é um cota).

Um número $s \in \mathbb{K}$ é chamado de *supremo* de A se valem as seguintes condições:

$$S_1 : a \leq s \quad \forall a \in A$$

$$S_2 : \text{Se } x \text{ é uma cota superior de } A, \text{ então } s \leq x$$

Em outras palavras, um modo simples de colocar a definição acima é: o supremo de um conjunto A é a menor das cotas superiores de A .

Um número $r \in \mathbb{K}$ é chamado de *ínfimo* de A se valem as seguintes condições:

$$I_1 : r \leq a \quad \forall a \in A$$

$$I_2 : \text{Se } y \text{ é uma cota inferior de } A, \text{ então } y \leq r$$

Em outras palavras, o ínfimo de um conjunto A é o maior das cotas inferiores de A .

Teorema Tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto, casos existam, são únicos.

Teorema Tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto, casos existam, são únicos.

Demonstração. Sejam B e C dois supremos para um conjunto S . A propriedade S_2 implica que $C \geq B$, uma vez que B é supremo; analogamente, $B \geq C$ já que C é supremo. Logo temos $B = C$. $\square$

Observação

- O teorema anterior justifica a seguinte notação: $\sup A$ para o supremo de A e $\inf A$ para o ínfimo de A .

Observação

- O teorema anterior justifica a seguinte notação: $\sup A$ para o supremo de A e $\inf A$ para o ínfimo de A .
- Nos exemplos acima, temos: $\inf A = 1$, $\inf C = 1$ e $\sup C = 3$ (note que A não possui supremo e B não possui nem ínfimo nem supremo).

Observação

- O teorema anterior justifica a seguinte notação: $\sup A$ para o supremo de A e $\inf A$ para o ínfimo de A .
- Nos exemplos acima, temos: $\inf A = 1$, $\inf C = 1$ e $\sup C = 3$ (note que A não possui supremo e B não possui nem ínfimo nem supremo).
- Assim, há casos em que o supremo (ou o ínfimo) pode não existir. O axioma de Completude diz que isso só poderá ocorrer com conjuntos ilimitados.

- Se $X \subset \mathbb{K}$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo. Da mesma forma, se X tiver um elemento mínimo, ele será o seu ínfimo.

- Se $X \subset \mathbb{K}$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo. Da mesma forma, se X tiver um elemento mínimo, ele será o seu ínfimo.
- Reciprocamente, se o supremo de X pertence a X , ele será o maior elemento de X ; e se o ínfimo de X pertence a X , ele será o menor elemento.

- Se $X \subset \mathbb{K}$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo. Da mesma forma, se X tiver um elemento mínimo, ele será o seu ínfimo.
- Reciprocamente, se o supremo de X pertence a X , ele será o maior elemento de X ; e se o ínfimo de X pertence a X , ele será o menor elemento.
- Em particular, qualquer subconjunto finito $X \subset \mathbb{K}$ possui ínfimo e supremo.

Exemplo

Se $X = (-\infty, b]$ e $Y = [a, +\infty)$, então $\inf Y = a$ e $\sup X = b$.

Exemplo

Afirmção: Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $I = (a, b)$. Temos $\inf I = a$ e $\sup I = b$.

Exemplo

Afirmção: Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $I = (a, b)$. Temos $\inf I = a$ e $\sup I = b$.

- De fato, a é claramente uma cota inferior de I . Agora, provemos que nenhum $c \in \mathbb{K}$, com $a < c$, pode ser uma cota inferior de I . Isso é evidente se $c \geq b$.

Afirmção: Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $I = (a, b)$. Temos $\inf I = a$ e $\sup I = b$.

- De fato, a é claramente uma cota inferior de I . Agora, provemos que nenhum $c \in \mathbb{K}$, com $a < c$, pode ser uma cota inferior de I . Isso é evidente se $c \geq b$.
- Por outro lado, se $a < c < b$, então $x = \frac{a+c}{2}$ é um elemento de I com $a < x < c$, o que demonstra que c não é uma cota inferior de I . Assim, $a = \inf I$.

Afirmção: Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $I = (a, b)$. Temos $\inf I = a$ e $\sup I = b$.

- De fato, a é claramente uma cota inferior de I . Agora, provemos que nenhum $c \in \mathbb{K}$, com $a < c$, pode ser uma cota inferior de I . Isso é evidente se $c \geq b$.
- Por outro lado, se $a < c < b$, então $x = \frac{a+c}{2}$ é um elemento de I com $a < x < c$, o que demonstra que c não é uma cota inferior de I . Assim, $a = \inf I$.
- De maneira análoga, pode-se mostrar que $b = \sup I$. Vale ressaltar que nesse exemplo temos que

$$\sup I \notin I \text{ e } \inf I \notin I.$$

Axioma de Completude:

Axioma 13 Todo subconjunto de $\mathbb{K}$, não vazio e limitado superiormente, possui supremo.

Apesar de não fazer menção ao ínfimo, o axioma de Completude é equivalente à seguinte propriedade:

Axioma 13' Todo subconjunto de $\mathbb{K}$, não vazio e limitado inferiormente, possui ínfimo.

Definição Um corpo que satisfaz os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** é dito um **corpo ordenado completo**.

¹Na verdade, caberia aprofundar tal "caracterização", o que será feito no **Capítulo 3**

Definição Um corpo que satisfaz os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** é dito um **corpo ordenado completo**.

Dessa forma, podemos agora dizer que os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** caracterizam o conjunto dos números reais¹.

¹Na verdade, caberia aprofundar tal "caracterização", o que será feito no **Capítulo 3**

*Um corpo ordenado completo será denominado **corpo dos números reais** ou simplesmente **números reais** e denotado por $\mathbb{R}$.*

Posteriormente, demonstraremos tanto a existência quanto a unicidade de tal corpo.

Exercício. Prove a propriedade axioma 13'.

Exercício. Prove a propriedade axioma 13'.

Sugestão: Dado um conjunto A limitado inferiormente, considere o conjunto $B = \{-a | a \in A\}$ e mostre que: i) B é limitado superiormente; ii) $\inf A = -\sup B$

Exemplo

Seja S o conjunto de todos os números da forma $(1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Todos os números do conjunto são maiores ou iguais a 1 e assim o conjunto é limitado inferiormente e portanto possui ínfimo. Com um pequeno esforço pode provar-se que 2 é o menor elemento de S , de modo que $\inf S = \min S = 2$.

O conjunto S é também limitado superiormente embora este fato não seja tão fácil de provar. Demonstraremos tal fato na seção 2.3. Uma vez conhecido que S é limitado superiormente, o **Axioma 13** assegura-nos que existe um número que é o supremo de S .

O conjunto S é também limitado superiormente embora este fato não seja tão fácil de provar. Demonstraremos tal fato na seção 2.3. Uma vez conhecido que S é limitado superiormente, o **Axioma 13** assegura-nos que existe um número que é o supremo de S .

Neste caso não é fácil determinar o valor de $\sup S$ a partir de definição do conjunto S . No capítulo seguinte aprenderemos que o $\sup S$ é um número irracional, denominado número de Euler e .

Propriedade arquimediana

Nesta secção apresentaremos algumas propriedades importantes do sistema dos números reais, as quais são consequência do axioma do supremo. Em especial, a Propriedade arquimediana que é um princípio fundamental em análise e que intuitivamente, nos diz que não existem números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos dentro dos reais.

$\mathbb{N}$ não é limitado superiormente

Teorema O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

$\mathbb{N}$ não é limitado superiormente

Teorema O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

Demonstração. Suponhamos $\mathbb{N}$ limitado superiormente. Vamos provar que essa hipótese leva a uma contradição. Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b . Absurdi.

$\mathbb{N}$ não é limitado superiormente

Teorema O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

Demonstração. Suponhamos $\mathbb{N}$ limitado superiormente. Vamos provar que essa hipótese leva a uma contradição. Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b . Absurdi.

Agora, observe que o número $b - 1$, por ser menor que b , não pode ser o limite superior de $\mathbb{N}$. Portanto, deve existir algum número natural n tal que $n > b - 1$. Para esse n , temos $n + 1 > b$.

Um corpo que satisfaz os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** é dito um **corpo ordenado completo**.

Dessa forma, podemos agora dizer que os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** caracterizam o conjunto dos números reais.

*Um corpo ordenado completo será denominado **corpo dos números reais** ou simplesmente **números reais** e denotado por $\mathbb{R}$.*

Posteriormente, demonstraremos tanto a existência quanto a unicidade de tal corpo.

Prove a propriedade axioma 13''.

[Sugestão: dado um conjunto A limitado inferiormente, considere o conjunto $B = \{-a \mid a \in A\}$ e mostre que: i) B é limitado superiormente; ii) $\inf A = -\sup B$]

Exemplo

Seja S o conjunto de todos os números da forma $(1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Todos os números do conjunto são maiores ou iguais a 1 e assim o conjunto é limitado inferiormente e portanto possui ínfimo. Com um pequeno esforço pode provar-se que 2 é o menor elemento de S , de modo que $\inf S = \min S = 2$.

O conjunto S é também limitado superiormente embora este fato não seja tão fácil de provar. Uma vez conhecido que S é limitado superiormente, o **Axioma 13** assegura-nos que existe um número que é o supremo de S . Neste caso não é fácil determinar o valor de $\sup S$ a partir de definição do conjunto S . Em breve, veremos que o $\sup S$ é um número irracional, denominado número de Euler e .

Propriedade Arquimediana

Apresentaremos algumas propriedades importantes do sistema dos números reais, as quais são consequência do axioma do supremo.

Apresentaremos algumas propriedades importantes do sistema dos números reais, as quais são consequência do axioma do supremo.

Em especial, a propriedade arquimediana, que é um princípio fundamental em análise e que, intuitivamente, nos diz que não existem números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos dentro do conjunto dos números reais.

Teorema O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

Demonstração

- Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente.

- Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente.
- Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b .

- Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente.
- Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b .
- Observe que o número $b - 1$, por ser menor que b , não pode ser o limite superior de $\mathbb{N}$.

- Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente.
- Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b .
- Observe que o número $b - 1$, por ser menor que b , não pode ser o limite superior de $\mathbb{N}$.
- Portanto, deve existir algum número natural n tal que $n > b - 1$. Para esse n , temos $n + 1 > b$.

- Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente.
- Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b .
- Observe que o número $b - 1$, por ser menor que b , não pode ser o limite superior de $\mathbb{N}$.
- Portanto, deve existir algum número natural n tal que $n > b - 1$. Para esse n , temos $n + 1 > b$.
- Como $n + 1$ pertence a $\mathbb{N}$, isso contradiz o fato de que b é um limite superior de $\mathbb{N}$, o que encerra a demonstração. $\square$

Teorema: Para qualquer real x existe um natural n tal que $n > x$.

Demonstração. Caso contrário, existiria um número x que serviria como limite superior de $\mathbb{N}$, o que contradiz diretamente o teorema anterior. Isso demonstra a impossibilidade da suposição inicial. $\square$

Teorema (Propriedade arquimediana) Se $x > 0$ e se y é um número real arbitrário, existe um natural n tal que $nx > y$.

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior com x substituído por y/x , $\square$

Definição Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ possui a propriedade arquimediana se, para quaisquer elementos positivos x e y em $\mathbb{K}$, existe um número natural n tal que $nx > y$.

Definição Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ possui a propriedade arquimediana se, para quaisquer elementos positivos x e y em $\mathbb{K}$, existe um número natural n tal que $nx > y$.

- O teorema anterior garante que os números reais possuem a propriedade arquimediana.

Definição Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ possui a propriedade arquimediana se, para quaisquer elementos positivos x e y em $\mathbb{K}$, existe um número natural n tal que $nx > y$.

- O teorema anterior garante que os números reais possuem a propriedade arquimediana.
- Geometricamente, isso significa que qualquer segmento de reta, não importa o quão longo, pode ser completamente coberto por um número finito de segmentos menores, de tamanho fixo.
- Em outras palavras, uma régua pequena, utilizada repetidamente, é capaz de medir qualquer distância, por maior que seja.

Definição

Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ é **arquimediano** se, para todo $x, y \in \mathbb{K}$ com $x > 0$ e $y > 0$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}} > y.$$

Teorema Se três números reais a , x e y verificam as desigualdades

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{1.3}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$, então $x = a$.

Demonstração

Se $x > a$, a propriedade arquimedeano garante-nos que existe um inteiro e positivo n para o qual

Demonstração

Se $x > a$, a propriedade arquimedeano garante-nos que existe um inteiro e positivo n para o qual

$n(x - a) > y$, contradizendo (1.3). Logo, não podendo ser $x > a$, teremos $x = a$.

Observação:

Mais adiante, provaremos que existe apenas um corpo ordenado completo, que denominaremos corpo dos números reais, no sentido de que qualquer dois corpos ordenados completos são isomorfos entre si.

Existência da Raiz Quadrada

Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 < 2\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ (por exemplo, $1 \in A$) e é um conjunto limitado superiormente (por exemplo, 3 é uma cota superior de A).

Existência da Raiz Quadrada

Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 < 2\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ (por exemplo, $1 \in A$) e é um conjunto limitado superiormente (por exemplo, 3 é uma cota superior de A).

Se o **Axioma 13** fosse válido em $\mathbb{Q}$, deveria existir $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p = \sup A$.

Existência da Raiz Quadrada

Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 < 2\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ (por exemplo, $1 \in A$) e é um conjunto limitado superiormente (por exemplo, 3 é uma cota superior de A).

Se o **Axioma 13** fosse válido em $\mathbb{Q}$, deveria existir $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p = \sup A$.

Se provarmos que para tal p , deve valer $p^2 = 2$, poderemos concluir que p não pode ser racional. Consequentemente, teremos concluído que não existe o supremo de A em $\mathbb{Q}$.

Existência da Raiz Quadrada

Mostraremos, na verdade, uma propriedade mais geral, da qual poderemos concluir a afirmação acima. Referimo-nos à existência da raiz quadrada de um número real positivo.

Existência da Raiz Quadrada

Mostraremos, na verdade, uma propriedade mais geral, da qual poderemos concluir a afirmação acima. Referimo-nos à existência da raiz quadrada de um número real positivo.

Proposição Seja $b \in \mathbb{R}$ um número positivo. Então existe um único número real positivo a tal que $a^2 = b$. O número a é chamado de **raiz quadrada** de b e é denotado por $\sqrt{b}$.

Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}.$$

Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}.$$

O conjunto A é não vazio, uma vez que $0 \in A$.

Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}.$$

O conjunto A é não vazio, uma vez que $0 \in A$.

Tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 1$ e $y > b$, resulta $y^2 > y > b$, logo A possui cota superior.

Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}.$$

O conjunto A é não vazio, uma vez que $0 \in A$.

Tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 1$ e $y > b$, resulta $y^2 > y > b$, logo A possui cota superior.

Pelo axioma de Completude, existe $a = \sup A$. É evidente que $a > 0$.

Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}.$$

O conjunto A é não vazio, uma vez que $0 \in A$.

Tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 1$ e $y > b$, resulta $y^2 > y > b$, logo A possui cota superior.

Pelo axioma de Completude, existe $a = \sup A$. É evidente que $a > 0$.

Queremos mostrar que $a^2 = b$.

Demonstração (continuação)

A ideia, para tanto, é mostrar que não pode ocorrer nem $a^2 < b$, nem $a^2 > b$, só restando a possibilidade que nos interessa.

Demonstração (continuação)

A ideia, para tanto, é mostrar que não pode ocorrer nem $a^2 < b$, nem $a^2 > b$, só restando a possibilidade que nos interessa.

Para descartar cada uma dessas duas desigualdades, verificaremos que:

- (i) supor que $a^2 < b$ contradiz o fato de a ser uma cota superior (condição S1 do supremo);

Demonstração (continuação)

A ideia, para tanto, é mostrar que não pode ocorrer nem $a^2 < b$, nem $a^2 > b$, só restando a possibilidade que nos interessa.

Para descartar cada uma dessas duas desigualdades, verificaremos que:

- (i) supor que $a^2 < b$ contradiz o fato de a ser uma cota superior (condição S1 do supremo);
- (ii) supor que $a^2 > b$ contradiz o fato de a ser o menor das cotas superiores (condição S2 do supremo).

Demonstração (continuação)

Pois bem, se fosse $a^2 < b$, poderíamos tomar um número natural $n > 1$ tal que⁶

$$n > \frac{2a+1}{b-a^2}.$$

Dai obtemos

$$\frac{2a+1}{n} < b - a^2.$$

Assim, tomando o número $c = a + 1/n$, seguiria:

$$c^2 = \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} < a^2 + b - a^2 = b$$

⁶A escolha deste n garante que $\frac{2a+1}{n} < b - a^2$

Demonstração (continuação)

Isso significa que $c \in A$ e $a < c$, contrariando a condição S1 do supremo. Portanto, está descartada a possibilidade de ser $a^2 < b$.

Demonstração (continuação)

Isso significa que $c \in A$ e $a < c$, contrariando a condição S1 do supremo. Portanto, está descartada a possibilidade de ser $a^2 < b$.

Suponhamos agora que valha $a^2 > b$. De modo semelhante ao que foi feito acima, poderíamos tomar $c = a - 1/n$, onde n é um inteiro tal que

$$n > \frac{2a}{a^2 - b}$$

Demonstração (continuação)

Da desigualdade acima, segue que

$$\frac{2an - 1}{n^2} < \frac{2an}{n^2} = \frac{2a}{n} < a^2 - b$$

donde obtemos

$$c^2 = \left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = a^2 + \frac{1 - 2an}{n^2} > a^2 + b - a^2 = b$$

Desse modo, c seria uma cota superior de A com $c < a$, contrariando a condição S2 do supremo.

Demonstração (conclusão)

Descartamos, assim, também a possibilidade de ser $a^2 > b$, podendo concluir, portanto, que $a^2 = b$.

Por fim, para provarmos a unicidade da raiz quadrada, basta observar que se um número positivo $m \in \mathbb{R}$ é tal que $m^2 = b$, então m tem que ser o supremo de A . Pela unicidade do supremo, deve ser $m = a$. $\square$

Voltando à questão antes formulada, é imediato agora verificar que se $p \in \mathbb{Q}$ é tal que $p = \sup A$, então $p^2 = 2$.

Logo, pelo que já foi dito anteriormente, concluímos que o conjunto dos racionais não satisfaz o axioma de Completude.

Propriedades do supremo e do ínfimo

Cristian F Coletti

CMCC - UFABC

Seja ϵ um número positivo dado e seja a um conjunto de números reais.

- 1 Se a possui supremo, então para algum x de a temos que

$$x > \sup a - \epsilon$$

- 2 Se a possui ínfimo, então para algum x de a temos que

$$x < \inf a + \epsilon$$

Demonstração do item 1. Se $x \leq \sup a - \epsilon$ para todo $x \in a$, então $\sup a - \epsilon$ seria um limite superior de a menor que o seu supremo. Logo temos que $x > \sup a - \epsilon$ para, pelo menos, um $x \in a$, o que demonstra 1.

A demonstração do item 2 é semelhante. $\square$

Dados dois subconjuntos não vazios A e B de $\mathbb{R}$, seja $A + B$ o conjunto

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

- ① Se A e B possuem supremo, então $A + B$ tem supremo e

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

- ② Se A e B possuem ínfimo, então $A + B$ possui ínfimo e

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

Suponhamos que A e B possuem supremo. Se $c \in C = A + B$, então $c = a + b$ com $a \in A$ e $b \in B$. Portanto $c \leq \sup A + \sup B$ e deste modo $\sup A + \sup B$ é um limite superior de C . Isto prova que C possui supremo e que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B$$

Seja agora n um inteiro e positivo qualquer. Segundo o teorema anterior (com $\epsilon = 1/n$) existe um a em A e um b em B , tais que

$$a > \sup A - \frac{1}{n}, \quad b > \sup B - \frac{1}{n}$$

Somando estas desigualdades obtemos $a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}$, ou $\sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n}$, uma vez que $a + b \leq \sup C$.

Consequentemente temos que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Então, temos que $\sup C = \sup a + \sup B$, o que prova 1; a demonstração de 2 é análoga. $\square$

Dados dois subconjuntos não vazios, A e B de $\mathbb{R}$ tais que

$$a \leq b \text{ para todo } a \text{ em } A \text{ e } b \text{ em } B,$$

então A possui supremo e B possui ínfimo e verifica-se

$$\sup A \leq \inf B$$

Cada b de B é um limite superior para A .

Portanto A possui supremo que satisfaz à desigualdade $\sup A \leq b$ para todo o b de B .

Disso resulta que $\sup A$ é um limite inferior para B , e assim B possui um ínfimo que não pode ser menor que $\sup A$.

Em outras palavras, temos $\sup A \leq \inf B$, como queríamos provar.

Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos não-vazios e limitados dos números reais.

- 1 Temos que $\inf(-X) = -\sup(X)$.
- 2 Se $Y \subseteq X$, então $\sup(Y) \leq \sup(X)$ e $\inf(Y) \geq \inf(X)$.

Proposição (continuação)

- ③ O conjunto $X \cap Y$ também é limitado. Se $X \cap Y \neq \emptyset$, temos as desigualdades $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup(X), \sup(Y))$ e $\inf(X \cap Y) \geq \max(\inf(X), \inf(Y))$.
- ④ O conjunto $X \cup Y$ também é limitado, com $\sup(X \cup Y) = \max(\sup(X), \sup(Y))$ e $\inf(X \cup Y) = \min(\inf(X), \inf(Y))$.

Proposição (continuação)

5 Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante real, então:

$$\sup(\lambda X) = \lambda \sup(X) \quad \text{e} \quad \inf(\lambda X) = \lambda \inf(X) \quad \text{se } \lambda > 0,$$

$$\sup(\lambda X) = \lambda \inf(X) \quad \text{e} \quad \inf(\lambda X) = \lambda \sup(X) \quad \text{se } \lambda < 0.$$

Proposição (continuação)

- 6 O conjunto $X + Y$ também é limitado, com $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$ e $\inf(X + Y) = \inf(X) + \inf(Y)$.
- 7 Se todos os elementos de X e Y são não-negativos, então o conjunto XY também é limitado, com $\sup(XY) = \sup(X) \sup(Y)$ e $\inf(XY) = \inf(X) \inf(Y)$.

Proposição (continuação)

- 8 Se todos os elementos de X são positivos, definimos o conjunto recíproco

$\frac{1}{X} = \left\{ \frac{1}{x} : x \in X \right\}$. Se $\inf(X) > 0$, então o conjunto $\frac{1}{X}$ é limitado, com

$$\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)} \quad \text{e} \quad \inf\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\sup(X)}.$$

Prova das afirmações 2, 3 e 8. As demais ficam como exercício para o leitor.

2. Seja $\sup(X) = a$. Para todo $x \in X$, temos $x \leq a$. Assim, para qualquer $y \in Y \subseteq X$, devemos também ter $y \leq a$. Portanto, a é uma cota superior para o conjunto Y e, assim, $\sup(Y) \leq a = \sup(X)$. Um argumento similar pode ser usado para mostrar que $\inf(Y) \geq \inf(X)$.

Demonstração (continuação)

3. Como X e Y são limitados, existem constantes $M, N > 0$ tais que cada elemento $x \in X$ satisfaz $x \leq M$ e cada $y \in Y$ satisfaz $y \leq N$. Assim, cada elemento de $X \cap Y$ é limitado superiormente tanto por M quanto por N .

Demonstração (continuação)

3. Como X e Y são limitados, existem constantes $M, N > 0$ tais que cada elemento $x \in X$ satisfaz $x \leq M$ e cada $y \in Y$ satisfaz $y \leq N$. Assim, cada elemento de $X \cap Y$ é limitado superiormente tanto por M quanto por N .

Assumindo que $X \cap Y \neq \emptyset$, pela completude dos reais, o supremo de $X \cap Y$ existe.

Note que $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$. Usando a primeira afirmação, temos $\sup(X \cap Y) \leq \sup(X)$ e $\sup(X \cap Y) \leq \sup(Y)$, o que implica $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup(X), \sup(Y))$.

Demonstração (continuação)

3. Como X e Y são limitados, existem constantes $M, N > 0$ tais que cada elemento $x \in X$ satisfaz $x \leq M$ e cada $y \in Y$ satisfaz $y \leq N$. Assim, cada elemento de $X \cap Y$ é limitado superiormente tanto por M quanto por N .

Assumindo que $X \cap Y \neq \emptyset$, pela completude dos reais, o supremo de $X \cap Y$ existe.

Note que $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$. Usando a primeira afirmação, temos $\sup(X \cap Y) \leq \sup(X)$ e $\sup(X \cap Y) \leq \sup(Y)$, o que implica $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup(X), \sup(Y))$.

A outra desigualdade para o ínfimo pode ser provada de forma semelhante.

8. Se $\inf(X) > 0$, então $x \geq \inf(X) > 0$ para todo $x \in X$. Portanto, temos que $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf(X)}$ para cada $x \in X$. Isso significa que o conjunto $\frac{1}{X} = \left\{ \frac{1}{x} : x \in X \right\}$ é limitado superiormente, e seu supremo existe e é positivo.

Demonstração (continuação)

Agora, vamos mostrar que $\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)}$. Claramente, para qualquer $y \in \frac{1}{X}$, temos $\frac{1}{y} \in X$, o que implica que $\frac{1}{y} \geq \inf(X)$. Portanto, devemos ter $\frac{1}{\inf(X)} \geq y$ para todo $y \in \frac{1}{X}$, o que indica que $\frac{1}{\inf(X)}$ é uma cota superior para o conjunto $\frac{1}{X}$. Assim, concluímos que $\sup\left(\frac{1}{X}\right) \leq \frac{1}{\inf(X)}$.

Demonstração (continuação)

Para a desigualdade inversa, note que $\sup\left(\frac{1}{X}\right)$ é uma cota superior para o conjunto $\frac{1}{X}$.

Demonstração (continuação)

Para a desigualdade inversa, note que $\sup\left(\frac{1}{X}\right)$ é uma cota superior para o conjunto $\frac{1}{X}$.

Para qualquer $x \in X$, temos $\frac{1}{x} \in \frac{1}{X}$ e, portanto, $\frac{1}{x} \leq \sup\left(\frac{1}{X}\right)$.

Demonstração (continuação)

Para a desigualdade inversa, note que $\sup\left(\frac{1}{X}\right)$ é uma cota superior para o conjunto $\frac{1}{X}$.

Para qualquer $x \in X$, temos $\frac{1}{x} \in \frac{1}{X}$ e, portanto, $\frac{1}{x} \leq \sup\left(\frac{1}{X}\right)$.

Isso implica que $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{X}\right)} \leq x$ para qualquer $x \in X$. Assim, $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{X}\right)}$ é uma cota inferior para o conjunto X , o que significa que $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{X}\right)} \leq \inf(X)$.

Demonstração (continuação)

Pela álgebra, concluímos que $\frac{1}{\inf(X)} \leq \sup\left(\frac{1}{X}\right)$. Portanto,
 $\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)}$.

Demonstração (continuação)

Pela álgebra, concluímos que $\frac{1}{\inf(X)} \leq \sup\left(\frac{1}{X}\right)$. Portanto,
 $\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)}$.

A outra igualdade pode ser provada de forma semelhante. $\square$

Definição:

O valor absoluto de um número real x , também chamado de módulo de x , é denotado por $|x|$ e dado por

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observação Uma leitura adequada da definição acima leva a ter em mente que ela abre, em geral, dois casos a serem analisados, dependendo do sinal da quantidade encerrada dentro do módulo.

Sejam x e y números reais quaisquer, então:

① $|x| \geq 0$

② $|x|^2 = x^2$

③ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

④ $|-x| = |x|$

⑤ $-|x| \leq x \leq |x|$

⑥ $|xy| = |x||y|$

Teorema

Se $a \geq 0$, então

- 1 $|x| \leq a$ se e somente se $-a \leq x \leq a$;
- 2 $|x| \geq a$ se e somente se $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Se $a \geq 0$, então

- 1 $|x| \leq a$ se e somente se $-a \leq x \leq a$;
- 2 $|x| \geq a$ se e somente se $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Demonstração. Precisamos provar duas afirmações: primeiro, que a desigualdade $|x| \leq a$ implica a dupla desigualdade $-a \leq x \leq a$; em segundo lugar, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.

Demonstração do Teorema

$\Rightarrow$ Suponhamos que $|x| \leq a$. Então, a partir disso, temos que $-a \leq -|x|$. Como x pode ser escrito como $x = |x|$ ou $x = -|x|$, podemos considerar ambos os casos. Assim, temos $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Isso demonstra a primeira afirmação.

Demonstração do Teorema

$\Rightarrow$ Suponhamos que $|x| \leq a$. Então, a partir disso, temos que $-a \leq -|x|$. Como x pode ser escrito como $x = |x|$ ou $x = -|x|$, podemos considerar ambos os casos. Assim, temos $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Isso demonstra a primeira afirmação.

$\Leftarrow$ Agora, suponhamos que $-a \leq x \leq a$. Se $x \geq 0$, então $|x| = x \leq a$. Por outro lado, se $x \leq 0$, temos $|x| = -x \leq a$. Em ambos os casos, obtemos $|x| \leq a$. Isso completa a demonstração.

Para x e y números reais arbitrários tem-se

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Para x e y números reais arbitrários tem-se

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Nota: Esta propriedade é conhecida como desigualdade triangular, porque quando é generalizada a vetores significa que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é igual ou menor do que a soma dos outros dois.

Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

e daí, concluímos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Se fizermos $x = a - c$ e $y = c - b$, então $x + y = a - b$ e a desigualdade triangular segue:

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c|.$$

Por indução matemática, podemos generalizar a desigualdade triangular do modo seguinte:

Para os números reais arbitrários $a_1, a_2, \dots, a_k$, tem-se

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Demonstração

Para $n = 1$ a desigualdade é trivial e para $n = 2$ é a desigualdade triangular. Suponhamos, então, que é verdadeira para n números reais. Para $n + 1$ números reais $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ temos

Demonstração

Para $n = 1$ a desigualdade é trivial e para $n = 2$ é a desigualdade triangular. Suponhamos, então, que é verdadeira para n números reais. Para $n + 1$ números reais $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ temos

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Demonstração

Para $n = 1$ a desigualdade é trivial e para $n = 2$ é a desigualdade triangular. Suponhamos, então, que é verdadeira para n números reais. Para $n + 1$ números reais $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ temos

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Portanto o teorema é verdadeiro para $n + 1$ números reais se for verdadeiro para n ; logo, pelo princípio de indução, é verdadeiro para todo natural n .

Teorema

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Se $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são números reais arbitrários, tem-se

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \quad (1.4)$$

O sinal de igualdade verifica-se se e só se existe um número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo valor de $k = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração

Temos $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$ para todo o real x , porque uma soma de quadrados nunca pode ser negativa. A desigualdade anterior pode escrever-se

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \quad (1.5)$$

onde

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Desejamos demonstrar que $B^2 \leq AC$.

Demonstração (continuação)

Se $A = 0$, cada $a_k = 0$ e deste modo $B = 0$ e o resultado é trivial. Se $A \neq 0$, podemos escrever

$$Ax^2 + 2Bx + C = A \left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

Demonstração (continuação)

Se $A = 0$, cada $a_k = 0$ e deste modo $B = 0$ e o resultado é trivial. Se $A \neq 0$, podemos escrever

$$Ax^2 + 2Bx + C = A \left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

O segundo membro é mínimo quando $x = -B/A$. Fazendo $x = -B/A$ em 1.5 obtemos $B^2 \leq AC$ o que demonstra o resultado.

Demonstração (continuação)

Se $A = 0$, cada $a_k = 0$ e deste modo $B = 0$ e o resultado é trivial. Se $A \neq 0$, podemos escrever

$$Ax^2 + 2Bx + C = A \left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

O segundo membro é mínimo quando $x = -B/A$. Fazendo $x = -B/A$ em 1.5 obtemos $B^2 \leq AC$ o que demonstra o resultado.

Exercício Verifique que a igualdade é válida se, e somente se, existir um x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo k .