

Funções de uma Variável

Taxas relacionadas

Cristian F. Coletti

30 de setembro de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC



- **Taxas relacionadas**

- **Exemplos**

Taxas relacionadas

Introdução

- Seja uma quantidade que depende de uma segunda quantidade, então qualquer mudança na segunda quantidade muda a primeira quantidade e a taxa na qual as duas quantidades mudam estão relacionadas. Esta relação é o que vamos estudar neste vídeo.
- Quando duas quantidades são relacionadas por uma **equação**, conhecendo o valor de uma quantidade podemos determinar o valor da outra.
- O tema da taxas relacionadas leva isso um passo além: conhecendo a **taxa** na qual uma quantidade está mudando podemos determinar a taxa na qual as outras mudanças estão ocorrendo.

- Para ver isso suponha que z representa uma quantidade que dependa de outras duas quantidades x e y , ou seja $z = f(x)$ e $z = g(y)$.
- A relação entre x e y pode ser expressa por uma função $y = h(x)$. Assim, $z = g(y) = g(h(x))$. Utilizando a **Regra da Cadeia** temos que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

- Portanto, pela regra da cadeia, temos que a **taxa de variação de z com relação a x é o produto entre a taxa de variação de z com relação a y e da taxa de variação de y com relação a x .**

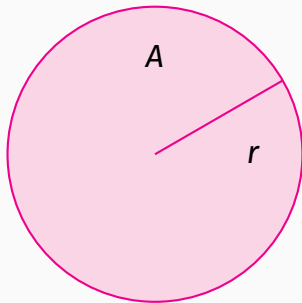
Exemplos

Exemplo 1

O raio de um círculo está aumentando à uma taxa constante de 2cm/s . Encontre a taxa de variação na qual a área do círculo está mudando quando o raio é 5cm .

Sejam r o raio do círculo e A a área do círculo.

Área do círculo de raio r .



Continuação do Exemplo 1

- Dado: $\frac{dr}{dt} = 2$
- Queremos: $\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=5}$
- relação do raio e a área: $A = \pi r^2$

Usando diferenciação implícita com respeito ao tempo t e $\frac{dr}{dt} = 2$, obtemos

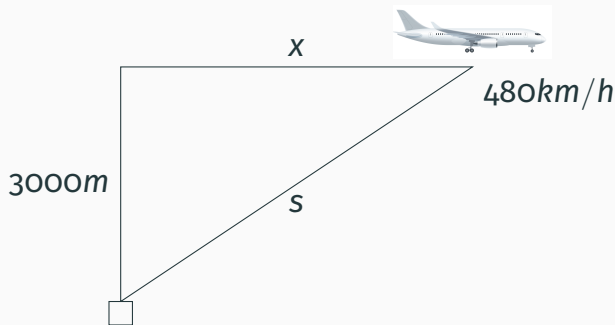
$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt}[\pi r^2] \\ &= 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi r(2) = 4\pi r.\end{aligned}$$

Avaliando em $r = 5$ obtemos

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=5} = 4\pi(5) = 20\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

Exemplo 2

Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 3000 m e uma velocidade de 480 km/h passando diretamente acima de um observador que está na terra. Qual é a taxa de variação da distância do observador ao avião 30 s depois?



Continuação do Exemplo 2

- Dado: $\frac{dx}{dt} = 480$
- Queremos: $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=\frac{1}{20}}$
- relação das variáveis usando o teorema de Pitágoras: $s^2 = 3^2 + x^2$

Usando diferenciação implícita com respeito ao tempo t e $\frac{dx}{dt} = 480$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{dt} &= \frac{d}{dt}[3^2 + x^2] \\ 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{480x}{s}.\end{aligned}$$

Continuação do Exemplo 2

Precisamos encontrar os valores de x e s , como o avião se movimenta a velocidade constante 480 km/h , ele viaja 4 km em $\frac{1}{20}$ horas (= 30 seg), logo $x=4$. Da relação $s^2 = 3^2 + x^2$ obtemos $s = 5$.

Avaliando em $t = \frac{1}{20}$ horas obtemos

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=\frac{1}{20}} = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{x=4, s=5} = \frac{480(4)}{5} = 384 \text{ km/h}.$$

Exemplo 3

Uma mancha de óleo circular de espessura uniforme foi causada por um derramamento de 1 m^3 de óleo numa lagoa. A espessura da mancha de óleo está diminuindo a uma taxa de $0,1\text{ cm/h}$. A que taxa o raio da mancha está aumentando quando o raio da mancha é de 8 m ?



Continuação do Exemplo 3

Vamos converter $0,1\text{ cm/h}$ para $0,001\text{ m/h}$.

- Dados: $V = 1$, $\frac{dh}{dt} = -0,001$
- Queremos: $\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=8}$
- relação entre as variáveis usando a expressão para o volume do cilindro:
 $1 = V = \pi r^2 h$

Continuação do Exemplo 3

Diferenciando com respeito ao tempo t e $\frac{dh}{dt} = -0,001$, obtemos

$$\frac{d}{dt}[1] = \frac{d}{dt}[\pi r^2 h]$$

$$0 = \frac{d}{dt}[\pi r^2]h + \pi r^2 \frac{d}{dt}[h]$$

$$0 = 2\pi r \frac{dr}{dt}h + \pi r^2 \frac{dh}{dt}.$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2h} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{0,0005 r}{h}$$

Continuação do Exemplo 3

Precisamos encontrar o valor de h , o que pode ser feito usando a relação $1 = V = \pi r^2 h$ em $r = 8$ obtemos $h = \frac{1}{64\pi}$.

Avaliando em $r = 8$ obtemos:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=8} = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=8, h=\frac{1}{64\pi}} = \frac{(0,0005)(8)}{\frac{1}{64\pi}} = 0,256\pi \text{ m/h}.$$

Funções de uma variável

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Exemplo 1

(a) Se A é a área de um círculo com raio r e o círculo se expande à medida que o tempo passa, encontre dA/dt em termos de dr/dt .

(b) Suponha que vaze petróleo por uma ruptura de um petroleiro e se espalhe em um padrão circular. Se o raio da mancha do petróleo derramado cresce a uma taxa constante de 2 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

Solução do Exemplo 1

Parte (a):

$$A = \pi r^2$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Parte (b):

$$\frac{dr}{dt} = 2 \text{ m/s}$$

$$r = 30 \text{ m}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(30)(2) = 120\pi \text{ m}^2/\text{s}$$

A área do vazamento está crescendo a uma taxa de $120\pi \text{ m}^2/\text{s}$ quando o raio é 30 m.

Exemplo 2

O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80 mm?

Solução do Exemplo 2

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = 4 \text{ mm/s}$$

$$\text{Diâmetro} = 80 \text{ mm} \Rightarrow r = 40 \text{ mm}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(40)^2(4) = 4\pi(1600)(4) = 25600\pi \text{ mm}^3/\text{s}$$

O volume está aumentando a uma taxa de $25600\pi \text{ mm}^3/\text{s}$ quando o diâmetro é 80 mm.

Exemplo 3

O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s . Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm , quão rápido a área do retângulo está aumentando?

Solução do exemplo 3

$$A = l \times w$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(lw) = w \frac{dl}{dt} + l \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = 8 \text{ cm/s}$$

$$\frac{dw}{dt} = 3 \text{ cm/s}$$

$$l = 20 \text{ cm}$$

$$w = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dA}{dt} = (10)(8) + (20)(3) = 80 + 60 = 140 \text{ cm}^2/\text{s}$$

A área do retângulo está aumentando a uma taxa de $140 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Exemplo 4

Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole $xy = 8$. Quando atinge o ponto $(4, 2)$, a coordenada y está decrescendo a uma taxa de 3 cm/s . Quão rápido a coordenada x do ponto está variando nesse momento?

Solução do Exemplo 4

$$xy = 8$$

$$\frac{d}{dt}(xy) = \frac{d}{dt}(8)$$

$$x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} = 0$$

$$x = 4, \quad y = 2, \quad \frac{dy}{dt} = -3 \text{ cm/s}$$

$$(4)(-3) + (2) \frac{dx}{dt} = 0$$

$$-12 + 2 \frac{dx}{dt} = 0$$

$$2 \frac{dx}{dt} = 12$$

$$\frac{dx}{dt} = 6 \text{ cm/s}$$

A coordenada x está aumentando a uma taxa de 6 cm/s.

Exemplo 5

Uma partícula move-se ao longo da curva $y = 2 \sin(x/2)$. Quando a partícula passa pelo ponto $(1, 1)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de $\sqrt{10}$ cm/s. Quão rápido a distância da partícula à origem está variando nesse momento?

Solução do Exemplo 5

$$D = D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \right) = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y = 2 \sin(x/2)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos(x/2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = \cos(x/2) \frac{dx}{dt}$$

$$x = 1, \quad y = 1, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{10} \text{ cm/s}$$

$$\cos(1/2) \approx \cos(0.5) \approx 0.8776$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.8776 \sqrt{10} \approx 0.8776 \times 3.1623 \approx 2.775$$

$$D = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{(1)(\sqrt{10}) + (1)(2.775)}{\sqrt{2}} = \frac{3.1623 + 2.775}{1.4142} = \frac{5.9373}{1.4142} \approx 4.2 \text{ cm/s}$$

A distância à origem está aumentando a aproximadamente 4,2 cm/s.

Exemplo 6

Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 12 m que passa por uma polia P (veja a figura). O ponto Q no chão está 4 m diretamente abaixo de P e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada para longe de Q a uma velocidade de $0,5 \text{ m/s}$. A que velocidade a carreta B está se movendo em direção a Q no instante em que a carreta A estiver 3 m de Q?

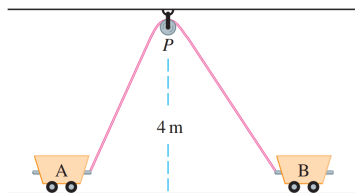


Figura: Carreta A sendo puxada para longe de Q e a carreta B sendo puxada em direção a Q.

Solução do Exemplo 6

Seja x = distância de A até Q

y = distância de B até Q

Comprimento da corda: $\sqrt{x^2 + 4^2} + \sqrt{y^2 + 4^2} = 12$

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 16}} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$x = 3 \text{ m}, \quad \frac{dx}{dt} = 0.5 \text{ m/s}$$

$$\sqrt{3^2 + 16} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{y^2 + 16} = 12 - 5 = 7 \Rightarrow y = \sqrt{33}$$

$$\frac{3}{5}(0.5) + \frac{\sqrt{33}}{7} \frac{dy}{dt} = 0$$

Dai, temos que

$$\frac{dy}{dt} \approx 1,83.$$

A carreta B está se movendo em direção a Q a aproximadamente 1,83 m/s.

Derivadas de Ordem Superior

Seja f uma função derivável em uma vizinhança de x_0 , $I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$. Seja f' a função derivada de f , portanto definida em uma vizinhança de x_0 .

Definição Se f' é derivável em x_0 , diz-se que f é derivável duas vezes em x_0 e põe-se

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

que chamamos *derivada segunda* de f em x_0 . A função *derivada segunda* de f , indicada com f'' , associa a x o valor $f''(x)$, onde este esteja definido.

Outras notações são comumente usadas para indicar a derivada segunda de f em x_0 , tais como

$$y''(x_0), \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x_0), \quad D^2f(x_0).$$

A *derivada terceira* de f em x_0 é, se existir, a derivada primeira em x_0 da função derivada segunda; ou seja,

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0).$$

Em geral, para $k \geq 1$, a *derivada de ordem k* (ou *derivada k -ésima*) de f em x_0 é, se existir, a derivada primeira da função derivada $(k - 1)$ -ésima de f em x_0 :

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Outros símbolos usados são

$$y^{(k)}(x_0), \quad \frac{d^k f}{dx^k}(x_0), \quad D^k f(x_0).$$

É conveniente pôr por definição $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Calculemos as derivadas sucessivas de algumas funções elementares.

i) Fixado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f(x) = x^n$. Tem-se

$$f'(x) = nx^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1x^{n-n} = n!.$$

De forma compacta, podemos escrever que, para $0 \leq k \leq n$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Tem-se então $f^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (porque a derivada da função constante $f^{(n)}(x) \geq 0$), e consequentemente todas as derivadas $f^{(k)}$ de ordem $k > n$ existem e são identicamente nulas.

ii) Consideremos a função $f(x) = \sin x$. Temos $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ e $f^{(4)}(x) = \sin x$. As derivadas sucessivas de f repetem ciclicamente tal sequência de funções trigonométricas. Um resultado análogo vale para a função $y = \cos x$.

iii) Seja finalmente $f(x) = e^x$. Sabemos que $f'(x) = e^x$ e portanto $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo $k \geq 0$. Tem-se portanto a notável propriedade de que as derivadas de toda ordem da função exponencial e^x coincidem com a própria função. $\square$

A seguir damos algumas definições úteis.

Definição Uma função f diz-se *de classe* C^k (com $k \geq 0$) em um intervalo I se ela é derivável k vezes em cada ponto de I e se sua função derivada de ordem k , $f^{(k)}$, é contínua em I . O conjunto das funções de classe C^k em I é indicado com $C^k(I)$.

Uma função f diz-se *de classe* C^∞ em I se ela é derivável um número arbitrário de vezes em cada ponto de I . O conjunto das funções de classe C^∞ em I é indicado com $C^\infty(I)$.

Obsevações

Obsevações

Sendo que toda função diferenciável é contínua, concluímos que se $f \in C^k(I)$, todas as suas derivadas de ordem menor ou igual a k são contínuas em I .

Obsevações

Sendo que toda função diferenciável é contínua, concluímos que se $f \in C^k(I)$, todas as suas derivadas de ordem menor ou igual a k são contínuas em I .

Observamos ademais que todas as funções elementares são deriváveis um número arbitrário de vezes (isto é, são de classe C^∞) em todos os pontos internos ao seu domínio.

Primeira e segunda fórmula do incremento finito

Estabelecemos agora duas fórmulas úteis para representar o incremento de uma função entre dois pontos do seu domínio. Começamos supondo que f seja uma função derivável em um ponto x_0 . Por definição, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

que equivale a dizer

Primeira e segunda fórmula do incremento finito

Estabelecemos agora duas fórmulas úteis para representar o incremento de uma função entre dois pontos do seu domínio. Começamos supondo que f seja uma função derivável em um ponto x_0 . Por definição, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

que equivale a dizer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ou seja, com a simbologia de Landau,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

Tal relação pode ser escrita de forma equivalente como

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0, \quad (6.11)$$

ou, pondo $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta f = f(x) - f(x_0)$,

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (6.12)$$

- As fórmulas (6.11)-(6.12) são expressões equivalentes da **primeira fórmula do incremento finito**.
- Ela diz que, se $f'(x_0) \neq 0$, o incremento Δf da variável dependente, correspondente a um incremento Δx da variável independente, é proporcional a Δx , a menos de um infinitésimo desprezível em relação a Δx .
- Na prática, isso significa que, para Δx suficientemente pequeno, estamos **autorizados** a confundir Δf com $f'(x_0)\Delta x$.

Incremento finito: segunda fórmula

- Seja f uma função contínua em um intervalo I de $\mathbb{R}$ e derivável nos seus pontos internos.
- Fixemos dois pontos $x_1 < x_2$ em I e observemos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2) . Portanto, as hipóteses do Teorema de Lagrange são satisfeitas pela função f restrita ao intervalo $[x_1, x_2]$. Logo existe $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\bar{x}),$$

ou seja, existe $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1). \quad (6.13)$$

Tal fórmula é chamada **segunda fórmula do incremento finito**.

- Note-se que o ponto $\bar{x}$ depende dos pontos x_1 e x_2 mas, em geral, tal dependência não é explícita.

- Note-se que o ponto $\bar{x}$ depende dos pontos x_1 e x_2 mas, em geral, tal dependência não é explícita.
- A importância da fórmula vem do fato de que ela permite obter informações sobre o incremento $f(x_2) - f(x_1)$ a partir do comportamento da função f' no intervalo $[x_1, x_2]$.

- Note-se que o ponto $\bar{x}$ depende dos pontos x_1 e x_2 mas, em geral, tal dependência não é explícita.
- A importância da fórmula vem do fato de que ela permite obter informações sobre o incremento $f(x_2) - f(x_1)$ a partir do comportamento da função f' no intervalo $[x_1, x_2]$.
- A segunda fórmula do incremento finito pode ser usada para descrever o comportamento de uma função na vizinhança de um ponto x_0 de modo mais preciso.

Exemplo Aproxime $\sqrt{4,04}$.

Solução: Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Logo,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $x_0 = 4$ temos que

$$\sqrt{4,04} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4,04 - 4) = 2,01$$

Valor verdadeiro: 2,009975. Erro: 0,0012 %.

Exemplo Aproxime $\sqrt{5}$.

Solução: Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Logo,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $x_0 = 4$ temos que

$$\sqrt{5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(5 - 4) = 2,25$$

Valor verdadeiro: 2,236068. Erro: 0,623 %.

Exemplos

Um objeto é retirado de um forno a 180 e colocado em uma sala com temperatura ambiente constante de 25. A taxa de resfriamento é dada pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde:

- T é a temperatura do objeto
- t é o tempo (minutos)
- $T_a = 25$ é a temperatura ambiente
- $k = 0,08$ é a constante de resfriamento

Sabendo que $T(5) = 128,90$, estime a variação de temperatura do objeto entre $t = 5$ e $t = 5,5$.

Solução: Estimando a variação da temperatura

Observe que:

$$\Delta T \approx \frac{dT}{dt} \Delta t$$

A derivada $\frac{dT}{dt}$ em $t = 5$:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=5} = -0,08(128,90 - 25) = -0,08 \times 103,90 = -8,312$$

Para $\Delta t = 0,5$:

$$\Delta T \approx (-8,312) \times 0,5 = -4,156$$

A temperatura estimada em $t = 5,5$ é:

$$T(5,5) \approx T(5) + \Delta T = 128,90 - 4,16 = 124,74$$

Resposta: A temperatura diminui aproximadamente 4,16 entre 5 e 5,5.

As fórmulas de Taylor

Neste parágrafo, abordamos o problema da aproximação de uma função f , na vizinhança de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, mediante polinômios algébricos de grau cada vez mais elevado.

Começamos supondo que a função seja pelo menos contínua em x_0 . Vale então a fórmula (5.4); se introduzimos o polinômio constante (de grau 0)

$$Tf_{0,x_0}(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

podemos escrever tal fórmula como

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + o(1), \quad x \rightarrow x_0. \quad (7.1)$$

Em outras palavras, podemos aproximar a função f , em uma vizinhança de x_0 , mediante um polinômio de grau 0 de modo que a diferença $f(x) - Tf_{0,x_0}(x)$ (chamada erro de aproximação, ou resto) seja um infinitésimo em x_0 . A relação (7.1) é o primeiro exemplo de fórmula de Taylor.

Suponhamos agora que a função f seja não só contínua mas também derivável em x_0 . Vale portanto a primeira fórmula do incremento finito (6.11); introduzindo o polinômio de primeiro grau em x

$$Tf_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cujo gráfico é, como sabemos, a reta tangente ao gráfico de f em x_0 (veja-se a Figura 7.2), a relação (6.11) escreve-se como

$$f(x) = Tf_{1,x_0}(x) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0,$$

(7.2)

que é uma nova fórmula de Taylor: ela diz que uma função derivável em x_0 pode ser aproximada na vizinhança de tal ponto mediante um polinômio de primeiro grau.

Se, pelo contrário, f for derivável em toda uma vizinhança de x_0 , exceto no máximo em x_0 , podemos usar nessa vizinhança a segunda fórmula do incremento finito (6.13), na qual pomos $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$ e que escrevemos como

Se, pelo contrário, f for derivável em toda uma vizinhança de x_0 , exceto no máximo em x_0 , podemos usar nessa vizinhança a segunda fórmula do incremento finito (6.13), na qual pomos $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$ e que escrevemos como

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + f'(\bar{x})(x - x_0),$$

(7.3)

Se, pelo contrário, f for derivável em toda uma vizinhança de x_0 , exceto no máximo em x_0 , podemos usar nessa vizinhança a segunda fórmula do incremento finito (6.13), na qual pomos $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$ e que escrevemos como

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + f'(\bar{x})(x - x_0),$$

(7.3)

onde $\bar{x}$ é um ponto oportuno compreendido entre x_0 e x . A equação (7.3) é uma fórmula de Taylor, na qual o resto é expresso na chamada *forma de Lagrange*.

Se, pelo contrário, f for derivável em toda uma vizinhança de x_0 , exceto no máximo em x_0 , podemos usar nessa vizinhança a segunda fórmula do incremento finito (6.13), na qual pomos $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$ e que escrevemos como

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + f'(\bar{x})(x - x_0),$$

(7.3)

onde $\bar{x}$ é um ponto oportuno compreendido entre x_0 e x . A equação (7.3) é uma fórmula de Taylor, na qual o resto é expresso na chamada *forma de Lagrange*.

Nas equações (7.1) e (7.2) o resto está na *forma de Peano*.

Aproximação de segunda ordem

- Depois de aproximar a função mediante polinômios de grau 0 ou 1, cometendo um erro que é respectivamente $o(1) = o((x - x_0)^0)$ e $o(x - x_0)$ para $x \rightarrow x_0$, é natural perguntar-se se é possível aproximar f mediante um polinômio de segundo grau.
- Será que o erro cometido será da forma $o((x - x_0)^2)$ para $x \rightarrow x_0$.

Procuraremos portanto se existe um número real a tal que se tenha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad x \rightarrow x_0.$$

(7.4)

Isso significa que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - a(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Tal condição é verificada se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x - x_0)}{2(x - x_0)} = 0,$$

ou seja se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - a \right) = 0.$$

Ou ainda se

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a.$$

Ou ainda se

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a.$$

Concluimos que a equação (7.4) é satisfeita se o limite no primeiro membro existe finito, isto é se f é derivável duas vezes em x_0

Ou ainda se

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a.$$

Concluimos que a equação (7.4) é satisfeita se o limite no primeiro membro existe finito, isto é se f é derivável duas vezes em x_0 . Nesse caso, o coeficiente a vale $\frac{1}{2}f''(x_0)$. Chegamos portanto à nova fórmula de Taylor (com resto na forma de Peano):

$$f(x) = Tf_{2,x_0}(x) + o((x - x_0)^2), \quad x \rightarrow x_0,$$

(7.5)

onde

$$Tf_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

chama-se polinômio de Taylor de f em x_0 de grau (ou ordem) 2

onde

$$Tf_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

chama-se polinômio de Taylor de f em x_0 de grau (ou ordem) 2

O procedimento que acabamos de descrever para a construção da aproximação de f de ordem 2 pode ser reiterado, a fim de construir aproximações polinomiais de f de ordem cada vez maior. O resultado preciso está contido no seguinte teorema.

Teorema 7.1 (Fórmula de Taylor com resto de Peano) Seja $n \geq 0$ e f derivável n vezes em x_0 . Então, vale a fórmula de Taylor

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

(7.6)

onde

$$Tf_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

(7.7)

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Observação:

- O polinômio $Tf_{n,x_0}(x)$ chama-se polinômio de Taylor de f em x_0 de grau (ou ordem) n , enquanto o termo $o((x - x_0)^n)$ na (7.6) chama-se resto de ordem n na forma de Peano.

Observação:

- O polinômio $Tf_{n,x_0}(x)$ chama-se polinômio de Taylor de f em x_0 de grau (ou ordem) n , enquanto o termo $o((x - x_0)^n)$ na (7.6) chama-se resto de ordem n na forma de Peano.
- A representação de f dada pela fórmula (7.6) chama-se desenvolvimento de Taylor de f em x_0 de ordem n , com resto na forma de Peano.

Com uma hipótese mais forte sobre f , somos capazes de dar uma expressão mais precisa do resto na fórmula de Taylor; ela estende a fórmula da equação (7.3).

Com uma hipótese mais forte sobre f , somos capazes de dar uma expressão mais precisa do resto na fórmula de Taylor; ela estende a fórmula da equação (7.3).

Teorema 7.2 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Seja $n \geq 0$ e f derivável n vezes, com derivada n -ésima contínua, em x_0 ; além disso, seja f derivável $n + 1$ vezes em uma vizinhança de x_0 , exceto eventualmente no ponto x_0 .

Com uma hipótese mais forte sobre f , somos capazes de dar uma expressão mais precisa do resto na fórmula de Taylor; ela estende a fórmula da equação (7.3).

Teorema 7.2 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Seja $n \geq 0$ e f derivável n vezes, com derivada n -ésima contínua, em x_0 ; além disso, seja f derivável $n + 1$ vezes em uma vizinhança de x_0 , exceto eventualmente no ponto x_0 . Então, vale a fórmula de Taylor

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1},$$

(7.8) para um $\bar{x}$ compreendido entre x_0 e x .

Com uma hipótese mais forte sobre f , somos capazes de dar uma expressão mais precisa do resto na fórmula de Taylor; ela estende a fórmula da equação (7.3).

Teorema 7.2 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Seja $n \geq 0$ e f derivável n vezes, com derivada n -ésima contínua, em x_0 ; além disso, seja f derivável $n + 1$ vezes em uma vizinhança de x_0 , exceto eventualmente no ponto x_0 . Então, vale a fórmula de Taylor

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1},$$

(7.8) para um $\bar{x}$ compreendido entre x_0 e x .

A expressão precedente do resto chama-se resto de ordem n na forma de Lagrange, e a (7.8) representa o desenvolvimento de Taylor de f em x_0 de ordem n , com resto na forma de Lagrange.

Notamos enfim que um desenvolvimento de Taylor na origem ($x_0 = 0$) chama-se também desenvolvimento de Maclaurin. Uma propriedade útil que permite simplificar o cálculo dos desenvolvimentos de Maclaurin é a seguinte.

Notamos enfim que um desenvolvimento de Taylor na origem ($x_0 = 0$) chama-se também desenvolvimento de Maclaurin. Uma propriedade útil que permite simplificar o cálculo dos desenvolvimentos de Maclaurin é a seguinte.

Teorema O polinômio de Maclaurin de uma função par (respectivamente ímpar) contém somente potências pares (respectivamente ímpares) da variável independente.

Funções de uma Variável

Derivada de funções inversas. Derivação Implícita.

Cristian F. Coletti

30 de setembro de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC



- Derivada da função inversa

Exemplos

- Derivada da função inversa: ideia da prova

- Diferenciação implícita

Exemplo

Derivada da função inversa

Derivada da função inversa

Podemos usar a regra da cadeia para encontrar a derivada da função inversa f^{-1} de uma função, quando existir.

Teorema

Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e inversível em (a, b) . Se f é diferenciável em $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, então a função inversa $f^{-1}(y)$ é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemplo: Derivada de $\log_a(x)$

Seja $y = f(x) = a^x$. Observe que $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \neq 0$ e que

$$x = f^{-1}(y) = \log_a(y).$$

Aplicando o teorema da derivada da função inversa obtemos

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\ln(a) \cdot a^x} = \frac{1}{\ln(a)y}.$$

Conclusão

Se $y > 0$, então

$$(\log_a(y))' = \frac{1}{\ln(a)y}.$$

Exemplo

Exemplo Seja $y = f(x) = \sin(x)$. Se $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (-1, 1)$. Observe que $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ e que $f'(x) = \cos(x)$. Então, se $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ temos que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))},$$

Como $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ temos que

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.\end{aligned}$$

Exemplo

Conclusão

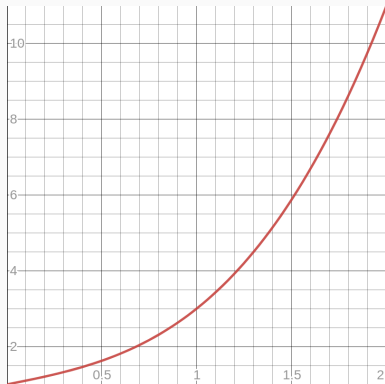
Se $y \in (-1, 1)$, então

$$(\arcsen(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Exemplo

- Seja $f : (0,2) \rightarrow (1,11)$ dada por $f(x) = x + x^3 + 1$. Observe que f é bijetora e diferenciável.

Gráfico de $x + x^3 + 1$



Exemplo

□ $f(1) = 3$ ($f^{-1}(3) = 1$) e $f'(1) = 4 \neq 0$.

□ Então,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}.$$

Derivada da função inversa: ideia da prova

Derivada da função inversa: ideia da prova

- A prova de que f^{-1} é diferenciável é técnica e será omitida.
- Segue da definição de inversa que

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

- Diferenciando ambos lados da equação acima obtemos

$$f'(f^{-1}(y)) (f^{-1})'(y) = 1$$

Derivada da função inversa: ideia da prova

□ Se $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, temos que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Derivada da função inversa: Observação

Observação

Note que a função inversa de f pode não ser diferenciável nos pontos onde $f' = 0$.

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Observe que: $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Entretanto, $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$ não é diferenciável em $y = 0$.

Diferenciação implícita

Diferenciação Implícita: Introdução

- Considere a equação

$$xy = 1. \tag{1}$$

- Neste caso é fácil descrever, de forma explícita, y em termos de x . De fato, $y = 1/x$ e

$$\frac{dy}{dx} = -1/x^2.$$

Observação

A seguir mostramos uma outra forma de resolver o mesmo problema.

Diferenciação Implícita: Introdução

Assumimos que: (i) a equação (1) define y como uma função de x e que (ii) y é diferenciável. Derivamos ambos lados da igualdade. Assim

$$\frac{d}{dx}xy = \frac{d}{dx}1$$

e, por tanto,

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

Usando que $xy = 1$ e isolando $\frac{dy}{dx}$ concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

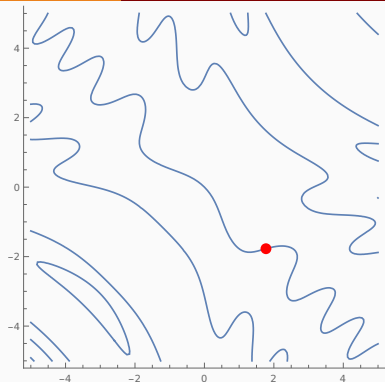
Diferenciação implícita

Exemplo Considere a função $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$\tan(x + y) = \sin(xy).$$

Encontre a equação da reta tangente à curva $y(x)$ no ponto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$, i.e.

$$y(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$$



Diferenciando ambos os lados da equação acima com relação a x temos que

$$\sec^2(x + y) \frac{d}{dx}(x + y) = \cos(xy) \frac{d}{dx}(xy).$$

Portanto

$$\sec^2(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \cos(xy) \left(y + x \frac{dy}{dx}\right).$$

Temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos(xy) - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - x \cos(xy)}.$$

Sabemos que $y(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$, então

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\sqrt{\pi}} &= \left. \frac{y \cos(xy) - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - x \cos(xy)} \right|_{x=\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{\pi} + 1}. \end{aligned}$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $y(x)$ no ponto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$ é dada por

$$t(x) = \frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{\pi} + 1} (x - \sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}.$$

Observação

Observação

A estratégia da diferenciação implícita consiste em diferenciar ambos os lados de uma equação, aplicar as regras de diferenciação e resolver a equação resultante onde a incógnita é a derivada da função definida de forma implícita.

Observação

Observação

- *Não é sempre verdade que uma função definida de forma implícita é diferenciável.*
- *No entanto, nos exemplos e exercícios desse curso sempre consideraremos que a função definida implicitamente seja diferenciável.*

Diferenciação Implícita: Exemplo

Considere a função $y = f(x)$ definida pela equação

$$2x^2y + \cos(y) = x^3.$$

É difícil, se não impossível, descrever y de forma explícita em termos de x .
Entretanto,

$$\frac{d}{dx} (2x^2y + \cos(y)) = \frac{d}{dx} x^3.$$

Observe que

$$\frac{d}{dx} (2x^2y + \cos(y)) = 4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} - \sin(y) \frac{dy}{dx}$$

e que

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2.$$

Diferenciação Implícita: Exemplo

Concluimos que

$$4xy + (2x^2 - \sin(y)) \frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Se $(2x^2 - \sin(y)) \neq 0$ então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4xy}{(2x^2 - \sin(y))}.$$

Derivada de $\arcsen(x)$

Defina $y = \arcsen(x)$. Observe que se $x \in (-1, 1)$, então $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e que

$$x = \sen(y)$$

Aplicando a técnica de diferenciação implícita vemos que

$$1 = \cos(y) \cdot y'$$

ou

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} \quad (\sen^2(x) + \cos^2(x) = 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Funções de uma Variável

Diferenciação implícita: Exemplos.

Cristian F. Coletti

30 de setembro de 2025

CMCC - Universidade Federal do ABC



- Introdução
- Derivada de $\arccos(x)$
- Derivada de $\arctan(x)$
- Derivada de $\ln(x)$
- Derivada de $\cot^{-1}(3x)$

Introdução

Introdução

Em aulas anteriores calculamos as derivadas das funções inversas

- $f(x) = \log_a(x)$, e
- $f(x) = \arcsen(x)$

Nessa aula iremos utilizar a técnica de diferenciação implícita para ampliar a lista de funções inversas diferenciáveis.

Derivada de $\arccos(x)$

Derivada de $\arccos(x)$

Defina $y = \arccos(x)$. Observe que se $x \in (-1, 1)$, então $y \in (0, \pi)$. Note que

$$x = \cos(y)$$

Aplicando a técnica de diferenciação implícita vemos que

$$1 = -\sin(y) \cdot y'$$

ou

$$y' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Derivada de $\arccos(x)$

Sendo que

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

vemos que

$$\begin{aligned}\sin(\arccos(x)) &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} \\ &= \sqrt{1 - x^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivada de $\arccos(x)$

Para finalizar, iremos verificar que $\cos^2(\arccos(x)) = x^2$. De fato,

$$\begin{aligned}\cos^2(\arccos(x)) &= \cos(\arccos(x)) \cdot \cos(\arccos(x)) \\ &= x \cdot x \\ &= x^2.\end{aligned}$$

Derivada de $\arctan(x)$

Derivada de $\arctan(x)$

Defina $y = \arctan(x)$. Observe que se $x \in \mathbb{R}$, então $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Note que

$$x = \tan(y)$$

Aplicando a técnica de diferenciação implícita vemos que

$$1 = (1 + \tan^2(y)) \cdot y'$$

ou

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \tan^2(y)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Derivada de $\arctan(x)$

Para finalizar, iremos verificar que $\tan^2(\arctan(x)) = x^2$. De fato,

$$\begin{aligned}\tan^2(\arctan(x)) &= \tan(\arctan(x)) \cdot \tan(\arctan(x)) \\ &= x \cdot x \\ &= x^2.\end{aligned}$$

Derivada de $\ln(x)$

Derivada de $\ln(x)$

Defina $y = \ln(x)$. Observe que se $x > 0$, então $y \in \mathbb{R}$. Note que

$$x = e^y$$

Aplicando a técnica de diferenciação implícita vemos que

$$1 = e^y \cdot y'$$

ou

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{e^y} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Derivada de $\cot^{-1}(3x)$

Derivada de $\cot^{-1}(3x)$

Defina $y = \cot^{-1}(3x)$. Observe que se $x \in \mathbb{R}$, então $y \in (0, \pi)$ e note que

$$3x = \cot(y).$$

Aplicando a técnica de diferenciação implícita vemos que

$$3 = \csc^2(y) \cdot y'.$$

Então

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{\csc^2(y)} \\ &= \frac{1}{1+9x^2}. \end{aligned}$$

Derivada de $\cot^{-1}(3x)$

Para finalizar, iremos verificar que $\csc^2(\cot^{-1}(3x)) = 1 + 9x^2$. Como

$$\csc^2(\theta) = 1 + \cot^2(\theta),$$

temos que

$$\begin{aligned}\csc^2(\cot^{-1}(3x)) &= 1 + \cot^2(\cot^{-1}(3x)) \\ &= 1 + \cot(\cot^{-1}(3x)) \cdot \cot(\cot^{-1}(3x)) \\ &= 1 + 9x^2.\end{aligned}$$