

Limite de funções e continuidade

Cristian Coletti

2.11 Limite de funções e continuidade

Limite de funções Dada uma função real f , estamos interessados em saber o comportamento de $f(x)$ à medida que x se aproxima de um ponto x_0 , sem que x assuma esse valor. Esse é o tema desta seção. Em muitos casos, $f(x)$ se aproxima de $f(x_0)$, o que ocorre para funções contínuas, uma classe que será abordada mais adiante. Precisamos esclarecer o que significa “ x se aproximar de x_0 sem, contudo, assumir esse valor”. Para investigar o valor de $f(x)$, é necessário que x pertença ao domínio de f , mas, como x não assume o valor x_0 , $f(x_0)$ pode não estar definido. Isso significa que x_0 não precisa pertencer ao domínio de f , mas é essencial que seja possível “se aproximar de x_0 ” a partir de pontos do domínio de f . Formalmente, se A é o domínio de f , a noção de limite de funções tem sentido se, e somente se, x_0 for ponto de acumulação de A . Isto ocorre quando $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$,

2.52 Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual a $L \in \mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Nesse caso, escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Queremos que

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Logo escolhemos

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Note que essa definição é análoga à de limite de sequências. A unicidade do limite também é válida aqui, e o leitor pode demonstrá-la como exercício.

2.53 Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O ponto 0 é um ponto de acumulação de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$ quando $0 < |x| < \delta$. Assim, temos

$$2 = |1 - (-1)| = |f(\delta/2) - f(-\delta/2)| \leq |f(\delta/2) - L| + |f(-\delta/2) - L| < 1 + 1 = 2,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

2.54 Exemplo

Seja $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1]$. Note que 0 não está no domínio de f , mas é ponto de acumulação deste. Faz sentido perguntar se existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 0, e, caso exista, determinar seu valor.

Mostraremos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Seja $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in (0, 1]$, temos

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Assim, tomando qualquer $\delta > 0$, temos que

$0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$. Concluimos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

2.55 Proposição (Limites por Sequências)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A . Temos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 .

Demonstração. Suponha que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ e $x_n \rightarrow x_0$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $x_n \rightarrow x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $|x_n - x_0| < \delta$. Logo, para $n \geq N$, temos $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, e, portanto, $f(x_n) \rightarrow L$.

Agora, suponha que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$ com $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = 1/n$, obtemos $x_n \in A$ tal que $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Assim, construímos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ convergente para x_0 , mas tal que $f(x_n)$ não converge para L , o que é um absurdo. Concluimos, portanto, que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L. \quad \square$$

2.56 Proposição (Propriedades do Limite)

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}$, então:

- 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M;$
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = cL;$
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L - M;$
- 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = LM;$
- 5 Se $M \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$

Demonstração. Deixamos para o leitor demonstrar essas propriedades a partir das correspondentes propriedades de limite de função. $\square$

2.57 Definição *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Dizemos que f é contínua em x_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, se $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Esta definição formaliza a ideia de que, quando x está suficientemente próximo de x_0 , os valores de $f(x)$ também estarão próximos de $f(x_0)$.

Observamos que ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua no ponto a quando $a \in A$.

2.58 Definição

Dizemos que f é contínua em A se for contínua em todo ponto de A . Denotamos isso por $f \in C(A)$, ou seja, $f \in C(A)$ se, para todo $y \in A$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Se a é um ponto isolado de A , então toda função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a . Pois dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap A = \{a\}$. Então $|x - a| < \delta$ com $x \in A$ implica $x = a$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Em particular, se todos os pontos de A são isolados, então qualquer função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

2.59 Proposição

Seja $a \in A$ um ponto de acumulação de A . Então $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Isso reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite nos pontos de acumulação.

A seguir, enunciamos uma proposição que nos permite evitar o uso direto de ε e δ em muitas situações.

2.60 Proposição *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge para x_0 , temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Essa proposição afirma que uma função é contínua se ela “comuta” com o símbolo de limite, isto é, f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right),$$

desde que a sequência (x_n) esteja contida no domínio de f e convirja para um ponto do domínio.

2.61 Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, tome uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e outra $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ambas convergindo para x_0 . Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0.$$

Portanto, f é descontínua em qualquer ponto.

Alguns autores utilizam a notação $C^0(A)$ para designar o conjunto das funções contínuas em A , em vez de $C(A)$.

2.62 Proposição (Continuidade da função composta)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0 . Assim, se f e g são contínuas, $g \circ f$ também é contínua.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ uma sequência convergente para x_0 . Como f é contínua, temos que $f(x_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$. Como g é contínua em y_0 , então $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) = g(y_0)$. Portanto, $g \circ f$ é contínua em x_0 . $\square$

2.63 Teorema (do Valor Intermediário de Bolzano)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Se k é um número real tal que $f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$, então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Demonstração. Suponha $f(a) < f(b)$. O outro caso é similar.

Construiremos duas sequências (a_n) e (b_n) através do seguinte procedimento: Se $m = \frac{a+b}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a, b]$, for tal que $f(m) \geq k$, então: $a_1 = a$ e $b_1 = m$. Caso contrário, $a_1 = m$ e $b_1 = b$.

Então temos: $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ e $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$. O processo é então repetido: se $m = \frac{a_1+b_1}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$, for tal que $f(m) \geq k$, então: $a_2 = a_1$ e $b_2 = m$. Caso contrário, $a_2 = m$ e $b_2 = b_1$.

Então temos: $a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b$ e $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$. E assim por diante, construímos uma sequência de intervalos encaixantes:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

Demonstração (continuação)

As sequências (a_n) e (b_n) são, respectivamente, crescente e decrescente. Além disso, por construção, o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ é $\frac{b-a}{2^n}$. Portanto, os intervalos $[a_n, b_n]$ têm comprimentos que tendem a 0 e as sequências (a_n) e (b_n) convergem, então, para o mesmo limite. Seja $c \in [a, b]$ o seu limite comum. Vamos mostrar que $f(c) = k$. Para qualquer inteiro $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$. Tomando o limite, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

Como f é contínua em c , temos: $f(c) \leq k \leq f(c)$. Portanto: $f(c) = k$. Concluimos que existe um número real $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$. $\square$

2.64 Proposição

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, o limite de toda sequência convergente em F pertence a F .

Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfaz a Propriedade do Valor Intermediário se $f : [a, b] \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Temos a seguinte equivalência: Um corpo $\mathbb{K}$ é completo se e somente se a Propriedade do Valor Intermediário é satisfeita.

Esse resultado justifica, ao menos em parte, a exigência de que um corpo seja completo para o desenvolvimento da Análise. A completude é fundamental porque permite a demonstração do Teorema do Valor Intermediário (e também do Teorema do Valor Médio), e o permitindo a existência de soluções para equações dentro de intervalos determinados. Sem essa propriedade, muitos dos resultados e teoremas centrais da Análise não poderiam ser assegurados.