

Funções de uma variável

Assíntotas

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Assíntotas

Definição informal: Do ponto de vista intuitivo, uma assíntota é uma reta à qual o gráfico de uma função $f(x)$ se aproxima cada vez mais conforme x tende a c , onde c pode ser x_0 , x_0^+ , x_0^- , $+\infty$ ou $-\infty$..

Assíntotas

Definição informal: Do ponto de vista intuitivo, uma assíntota é uma reta à qual o gráfico de uma função $f(x)$ se aproxima cada vez mais conforme x tende a c , onde c pode ser x_0 , x_0^+ , x_0^- , $+\infty$ ou $-\infty$..

Tipos de assintoas Podemos ter assintotas horizontais, verticais, e oblíquas.

Definição: Dizemos que a reta $y = a$ é **assíntota horizontal** da função f , se ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Definição: Dizemos que a reta $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

Definição: Dizemos que a reta $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

Definição: Dizemos que a reta $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

Definição: Dizemos que a reta $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

Definição: Dizemos que a reta $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

Observação: Uma função também pode se aproximar cada vez mais a uma reta que não seja horizontal ou vertical, ou seja uma reta oblíqua.

Observação: Uma função também pode se aproximar cada vez mais a uma reta que não seja horizontal ou vertical, ou seja uma reta oblíqua.

Observação: Uma função também pode se aproximar cada vez mais a uma reta que não seja horizontal ou vertical, ou seja uma reta oblíqua.

Definição: Dizemos que a reta $y = mx + b$ é assíntota oblíqua de uma função f quando x cresce (ou decresce) ilimitadamente se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = b \quad (\text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = b).$$

Observação: Uma função também pode se aproximar cada vez mais a uma reta que não seja horizontal ou vertical, ou seja uma reta oblíqua.

Definição: Dizemos que a reta $y = mx + b$ é assíntota oblíqua de uma função f quando x cresce (ou decresce) ilimitadamente se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = b \quad (\text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = b).$$

Em outras palavras, a distância entre a função $f(x)$ e a reta $y = mx + b$ tende a zero.

Assíntotas oblíquas (cont.)

Para poder verificar a existência desse limite, temos que ter um valor para a possível inclinação m da assíntota oblíqua. Note que

Assíntotas oblíquas (cont.)

Para poder verificar a existência desse limite, temos que ter um valor para a possível inclinação m da assíntota oblíqua. Note que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m$$
$$\left(\text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = m \right)$$

se esse limite existir.

Assíntotas oblíquas (cont.)

Para poder verificar a existência desse limite, temos que ter um valor para a possível inclinação m da assíntota oblíqua. Note que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m$$
$$\left(\text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = m \right)$$

se esse limite existir.

Observação: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = m$ se as condições do Teorema de L'hôpital forem satisfeitas.

Assíntotas oblíquas (cont.)

Para poder verificar a existência desse limite, temos que ter um valor para a possível inclinação m da assíntota oblíqua. Note que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m$$
$$\left(\text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = m \right)$$

se esse limite existir.

Observação: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = m$ se as condições do Teorema de L'hôpital forem satisfeitas.

A existência de um desses últimos limite não garante a existência da assíntota oblíqua. O fato da inclinação da função tender a um valor constante é necessário para ela poder ter uma assíntota oblíqua, mas não é suficiente.

Exemplo

Determine se a função $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+1}$ possui assíntotas oblíquas.

Exemplo

Determine se a função $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+1}$ possui assíntotas oblíquas.

Resposta: Ao derivar, obtemos

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x+3) \cdot (x+1) - (x^2+3x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \\&= \frac{2x^2+5x+3 - (x^2+3x-1)}{(x+1)^2} \\&= \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}\end{aligned}$$

Exemplo

Determine se a função $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x+1}$ possui assíntotas oblíquas.

Resposta: Ao derivar, obtemos

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x+3) \cdot (x+1) - (x^2+3x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \\&= \frac{2x^2+5x+3 - (x^2+3x-1)}{(x+1)^2} \\&= \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2/x+4/x^2}{1+2/x+1/x^2} = 1 = m.$$

Exemplo (cont.)

Por outro lado,

Exemplo (cont.)

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} - x \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x(x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - 1/x}{1 + 1/x} = 2 = b.\end{aligned}$$

Exemplo (cont.)

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} - x \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x(x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - 1/x}{1 + 1/x} = 2 = b.\end{aligned}$$

Portanto, a reta $y = x + 2$ é assíntota oblíqua da função f quando $x \rightarrow \infty$ e também quando $x \rightarrow -\infty$.

Exemplo (cont.)

Observação: Esse comportamento é mais intuitivo ao observarmos que podemos reescrever a função como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - x + 3x - 1}{x + 1} = x + \frac{2(x + 1) - 2 - 1}{x + 1} \\ &= x + 2 - \frac{3}{x + 1} \end{aligned}$$

o que mostra que, quando x cresce, a diferença entre a função e a reta $y = x + 2$ vai ficar cada vez menor.

Exemplo

Determine se a função $g(x) = \frac{x^2+3x^{3/2}-1}{x+1}$ possui assíntotas oblíquas.

Exemplo

Determine se a função $g(x) = \frac{x^2+3x^{3/2}-1}{x+1}$ possui assíntotas oblíquas.

Resposta: Só precisamos analisar $x \rightarrow +\infty$, pois a função só é definida para $x \geq 0$. Ao derivar, obtemos

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{(2x + 9x^{1/2}/2) \cdot (x + 1) - (x^2 + 3x^{3/2} - 1) \cdot 1}{(x + 1)^2} \\&= \frac{2x^2 + 9x^{3/2}/2 + 2x + 9x^{1/2}/2 - (x^2 + 3x^{3/2} - 1)}{(x + 1)^2} \\&= \frac{x^2 + 3x^{3/2}/2 + 2x + 9x^{1/2}/2 + 1}{x^2 + 2x + 1}\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x^{3/2}/2 + 2x + 9x^{1/2}/2 + 1}{x^2 + 2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^{-1/2}/2 + 2/x + 9x^{-3/2}/2 + 1/x^2}{1 + 2/x + 1/x^2} \\ &= 1 = m.\end{aligned}$$

Exemplo (cont.)

Mas

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x^{3/2} - 1}{x + 1} - x \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x^{3/2} - 1 - x(x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{3/2} - x - 1}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{1/2} - 1 - 1/x}{1 + 1/x} \\&= +\infty.\end{aligned}$$

não existe.

Observação

O fato do último limite ter resultado infinito significa que o gráfico da função g se afasta cada vez mais de qualquer reta com inclinação $m = 1$.

Observação

O fato do último limite ter resultado infinito significa que o gráfico da função g se afasta cada vez mais de qualquer reta com inclinação $m = 1$.

Portanto, essa função não possui uma assíntota oblíqua.

- Vamos ver como calcular limites do tipo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5}.$$

- Teorema do limite no infinito: Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{i})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ii})$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = ?$$

- Colocando $x \neq 0$ em evidência no numerador e denominador obtemos:

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = ?$$

- Colocando $x \neq 0$ em evidência no numerador e denominador obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}$$

- Aplicando os teoremas básicos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 - \frac{3}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{5}{x})} \\ &= \frac{4 - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} = 2 \end{aligned}$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = ?$$

- Colocando $x \neq 0$ em evidência no numerador e denominador obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}$$

- Aplicando os teoremas básicos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 - \frac{3}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{5}{x})} \\ &= \frac{4 - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} = 2 \end{aligned}$$

- A reta $y = 2$ é assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = ?$$

- Colocando em evidência x^3 (maior potência):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = ?$$

- Colocando em evidência x^3 (maior potência):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

- Aplicando o teorema do limite no infinito:

$$= \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0} = \frac{0}{4} = 0$$

Limites infinitos e assíntotas verticais

Limites infinitos

Example

Considere $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$

- Quando x se aproxima de 2, $f(x)$ cresce ilimitadamente

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{199}{100}$	$\dots$
f	3	12	27	48	300	30000	$\dots$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$

- Quando o limite de uma função é $\pm\infty$, o **limite não existe**
- O símbolo $\pm\infty$ indica o comportamento da função: valores (de)crescem ilimitadamente
- Notação similar para limites no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Definition

A reta vertical $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Assíntotas verticais

Definition

A reta vertical $x = a$ é **assíntota vertical** da função f quando ao menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Example

Para $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$, a reta $x = 2$ é assíntota vertical pois:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = \infty$$

Teorema do limite infinito

Se r é um número positivo, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} \infty, & r \text{ par} \\ -\infty, & r \text{ ímpar} \end{cases}, \quad r \in \mathbb{N}$$

Note que, se $r \notin \mathbb{N}$, o último limite não está nos números reais.

Teorema do denominador zero

Se a é um número real qualquer, I um intervalo aberto contendo a , e se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \neq 0$, c constante, e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então:

(i) Se $c > 0$ e $g(x) > 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

(ii) Se $c > 0$ e $g(x) < 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

Teorema do denominador zero (continuação)

(iii) Se $c < 0$ e $g(x) > 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

(iv) Se $c < 0$ e $g(x) < 0$ para $x \in I$, $x \neq a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Este teorema vale também para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = ?$$

Analisando numerador e denominador em separado, observamos

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$$

Pelo fato do denominador tender a zero, não podemos aplicar os teoremas básicos para calcular o limite. Mas podemos usar o teorema do denominador zero. Observamos que $3 > 0$ e $(x-2)^2 > 0 \forall x \neq 2$. Assim, podemos concluir que o limite zero do denominador é alcançado passando somente por valores positivos. Portanto, pela parte (i) do teorema do denominador zero,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$, se existir.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$, se existir.

O limite do denominador é zero. Temos que ver o sinal do limite do numerador, $14 > 0$, e se os valores da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são positivos ou negativos em volta de 3.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$, se existir.

O limite do denominador é zero. Temos que ver o sinal do limite do numerador, $14 > 0$, e se os valores da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são positivos ou negativos em volta de 3.

Observamos que $f(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ e $f(x) > 0$ para $x > 3$, portanto temos que distinguir os dois limites laterais:

Exemplo

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$, se existir.

O limite do denominador é zero. Temos que ver o sinal do limite do numerador, $14 > 0$, e se os valores da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são positivos ou negativos em volta de 3.

Observamos que $f(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ e $f(x) > 0$ para $x > 3$, portanto temos que distinguir os dois limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$, se existir.

O limite do denominador é zero. Temos que ver o sinal do limite do numerador, $14 > 0$, e se os valores da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são positivos ou negativos em volta de 3.

Observamos que $f(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ e $f(x) > 0$ para $x > 3$, portanto temos que distinguir os dois limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

Portanto o limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$ não existe! Observamos que a reta $x = 3$ é assíntota vertical dessa função.

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = ?$$

Note que, colocando a maior potência envolvida, 2, no numerador e no denominador, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Observamos que o limite do numerador é $-1 < 0$, o do denominador é 0, passando somente por valores positivos, pois x é positivo. Portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = -\infty$$

Teorema da soma infinita

(i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ constante, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \infty$$

(ii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ constante, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = -\infty$$

(iii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Teorema do produto infinito

(i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c > 0$ ou $+\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \infty$$

(ii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c < 0$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

Teorema do produto infinito (continuação)

(iii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c > 0$ ou $+\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

(iv) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c < 0$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \infty$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Teorema do denominador infinito

Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ (ou $|f(x)| < M \in \mathbb{R}$ para x perto de a), então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

O teorema vale para limites laterais e limites para infinito da mesma forma.

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} + \frac{2x^2 + 2}{x - 1} \right) = ?$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= +\infty$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2}{2x^4 + x^6} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2}{2x^4 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{2 - x^2}{2 + x^2}$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2}{2 + x^2} = 1$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \cdot \frac{2 - x^2}{2 + x^2} = +\infty$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = ?$$

Temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x}{3 + 5/x} = -\infty$$

onde usamos os teoremas da soma e do produto infinito.

Exemplo

Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$.

Exemplo

Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$.

Assíntotas horizontais: As assíntotas horizontais descrevem o comportamento da função “no infinito”, i.e., para $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Assim, calculamos os limites no infinito da função:

Exemplo

Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$.

Assíntotas horizontais: As assíntotas horizontais descrevem o comportamento da função “no infinito”, i.e., para $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Assim, calculamos os limites no infinito da função:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = 1$$

Determine as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$.

Assíntotas horizontais: As assíntotas horizontais descrevem o comportamento da função “no infinito”, i.e., para $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Assim, calculamos os limites no infinito da função:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = 1$$

Portanto, a reta $y = 1$ é assíntota horizontal de f quando $x \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

Exemplo (continuação)

Assíntotas verticais: Primeiramente, observamos que assíntotas verticais podem existir somente onde a função é descontínua, uma vez que precisamos um limite infinito naquele local.

Exemplo (continuação)

Assíntotas verticais: Primeiramente, observamos que assíntotas verticais podem existir somente onde a função é descontínua, uma vez que precisamos um limite infinito naquele local.

A função dada é racional, portanto é contínua (em seu domínio). Assim, precisamos analisar somente os pontos onde o denominador é zero, i.e., $x = 0$ e $x = -1$. Observamos que

Exemplo (continuação)

Assíntotas verticais: Primeiramente, observamos que assíntotas verticais podem existir somente onde a função é descontínua, uma vez que precisamos um limite infinito naquele local.

A função dada é racional, portanto é contínua (em seu domínio). Assim, precisamos analisar somente os pontos onde o denominador é zero, i.e., $x = 0$ e $x = -1$. Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x + 1} = -1$$

Uma vez que o limite existe, f não possui uma assíntota vertical em $x = 0$.

Exemplo (Continuação)

Precisamos avaliar o sinal da função no denominador. Como $x + 1 < 0$ para $x < -1$ e $x + 1 > 0$ para $x > -1$, temos os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta $x = -1$ é assíntota vertical.

Outras Formas Indeterminadas

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Outras formas indeterminadas

As outras formas indeterminadas são “ $0 \cdot \infty$ ”, “ $\infty - \infty$ ”, “ 0^0 ”, “ ∞^0 ”, e “ 1^∞ ”.

Por exemplo, se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = \infty^0$$

Notícia ruim: Para essas formas indeterminadas, a regra de L'Hôpital NÃO SE APLICA!

Notícia boa: Porém, elas podem ser modificadas algebricamente, de modo que a indeterminação apareça na forma

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

onde a regra é aplicável.

A forma indeterminada “ $0 \cdot \infty$ ”

Ideias para manipular “ $0 \cdot \infty$ ”: Observe que

$$\frac{1}{0} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

Assim, “ $0 \cdot \infty$ ” =

$$\text{“}\frac{\infty}{\frac{1}{0}}\text{”} \quad \text{ou} \quad \text{“}\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\text{”}$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \rightarrow -\infty$$

é indeterminado mas não $\frac{0''}{0}$ ou $\frac{\infty''}{\infty}$.

Porém:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

A forma indeterminada “ $\infty - \infty$ ”

Ideias para manipular “ $\infty - \infty$ ”:

“ $\infty - \infty$ ” =

$$\frac{(\infty)(\infty + \infty)}{\infty + \infty} \quad \text{ou} \quad “\infty \left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)”$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x) - g(x)][f(x) + g(x)]}{f(x) + g(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) + g(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) \\&= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)\end{aligned}$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = ?$$

Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Portanto, temos uma expressão indeterminada da forma “ $\infty - \infty$ ”.

Algebricamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right)$$

Exemplo (continuação)

Notamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{“\infty”}{\infty}$$

admite aplicação da Regra de L'Hospital.

Obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = ?$$

Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x(x-1)} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty$$

Portanto, temos uma expressão indeterminada da forma “ $\infty - \infty$ ”.

Multiplicação pelo conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Aplicando a Regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} + 1}$$

onde notamos que a expressão $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ no denominador ainda é indeterminada do tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Observe que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1$$

Exemplo (continuação)

Aplicando a Regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} + 1}$$

onde notamos que a expressão $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ no denominador ainda é indeterminada do tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Observe que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} + 1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x = -\frac{1}{2}$$

Formas indeterminadas exponenciais

As formas indeterminadas exponenciais 0^0 , ∞^0 , e 1^∞

Ideias para manipular as expressões exponenciais indeterminadas.

Usar que $a^b = e^{b \ln(a)}$.

$$\begin{cases} 0^0 = e^{0 \ln 0} \\ 1^\infty = e^{\infty \ln 1} \\ \infty^0 = e^{0 \ln \infty} \end{cases}$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x-3} \right)^{\ln(x-2)} = \infty^0 \quad \text{forma indeterminada}$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x-3} \right)^{\ln(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{\ln(x-2) \ln\left(\frac{1}{x-3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{-\ln(x-2) \ln(x-3)} \end{aligned}$$

$$= e^{-\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) \cdot \ln(x-3)} = e^{0 \cdot (-\infty)} \cdot \text{Forma indeterminada}$$

Limite no expoente: $L = e^{-L_1}$ com

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) \ln(x-3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\frac{1}{\ln(x-2)}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Exemplo (continuação)

L'Hopital:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\frac{1}{x-3}}{-\frac{1}{(\ln(x-2))^2} \cdot \frac{1}{x-2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2) \ln^2(x-2)}{x-3} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}}{1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x-3} \right)^{\ln(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{-\ln(x-2) \cdot \ln(x-3)} \\ &= e^{-L_1} = e \end{aligned}$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = 1^\infty.$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \cdot \ln(\cos \frac{1}{x})} \end{aligned}$$

Limite no expoente: $L = e^{L_1}$ com

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\cos \frac{1}{x} \right)}{x^{-2}} \\ &= \frac{0}{0} \text{ forma indeterminada} \end{aligned}$$

L'H:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \cdot \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2x^{-3}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \left(\text{fazendo } t = \frac{1}{x}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \right)$$

Assim,

$$L_1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{L_1} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Resumo dos limites de formas indeterminadas

I) Formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

Aplicar a regra de L'Hôpital: Se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$; se

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($g'(x) \neq 0$ em I contendo a sem possivelmente a)
($f'(x)$ e $g'(x)$ existem em I) então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

- II) Outras formas indeterminadas: Primeiro, modificar algebricamente, até a indeterminação desaparecer ou assumir a forma " $\frac{0}{0}$ " ou " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Nessa forma, podemos aplicar a regra de L'Hôpital.

- II) Outras formas indeterminadas: Primeiro, modificar algebricamente, até a indeterminação desaparecer ou assumir a forma " $\frac{0}{0}$ " ou " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Nessa forma, podemos aplicar a regra de L'Hôpital.
- III) Nem sempre a aplicação da regra de L'Hôpital fornece uma solução. Nestes casos, é preciso procurar uma modificação algébrica que permite tratar as indeterminações de outra forma.

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) \cos \frac{\pi}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos \frac{\pi}{x} = 0$$

Forma indeterminada: $0 \cdot \infty$.

Transformar algebricamente:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) \cos \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x - 2)}{\sec \frac{\pi}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Exemplo (continuação)

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\sec \frac{\pi}{x}} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{\sec \frac{\pi}{x} \tan \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2}{\pi(x-2) \sec \frac{\pi}{x} \tan \frac{\pi}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2}{\pi(x-2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sec \frac{\pi}{x} \tan \frac{\pi}{x}} = \frac{-4}{\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{x}}{x-2}\end{aligned}$$

L'H:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{x}}{x-2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{1} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \cos \frac{\pi}{x} = \frac{-4}{\pi} \cdot 0 = 0$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\sin \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x = \sin \pi = 0$$

Forma indeterminada “0⁰”.

Transformação algébrica usando a definição da função exponencial:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\sin \pi x \ln(\ln x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x \ln(\ln x)}$$

Limite no expoente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x \cdot \ln(\ln x) = 0 \cdot \infty$$

Exemplo (continuação)

Transformação algébrica:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x \ln(\ln x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\sin \pi x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Aplicar L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\sin \pi x}} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 \pi x} \cos \pi x \cdot \pi} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi x \ln x \cos \pi x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{\ln x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi x \cos \pi x} = -\frac{0}{0} \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{\ln x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin \pi x \cos \pi x \cdot \pi}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} 2\pi x \sin \pi x \cos \pi x = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x \cdot \ln(\ln x) = 0$$

e, em consequência,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\sin \pi x} = e^0 = 1$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} = ?$$

Notamos que trata-se de uma forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a regra de L'Hopital, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}(2x + 1)}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{4\sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} \end{aligned}$$

que é o limite original, agora no denominador.

Exemplo (continuação)

Notamos que a aplicação da regra de L'Hospital não simplificou o problema. Mas divisão de numerador e denominador da fração original por $x = \sqrt{x^2} > 0$ resulta em

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Notamos que $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\ln x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$. Portanto, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ e podemos aplicar a Regra de L'Hopital.

Obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 \sqrt{\ln x}}$$

Exemplo (continuação)

Como no exemplo anterior, notamos que a expressão não simplificou. Mas podemos aplicar a Regra de L'Hospital de outra forma:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{\ln x}{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainda, na primeira tentativa, podemos reconhecer o próprio limite no denominador da expressão obtida após aplicação da Regra de L'Hopital, ou seja,

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

que, junto com o sinal da expressão original, permite concluir que

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{caso exista})$$

Cabe notar que esse procedimento só é válido, porque o limite existe, mas não permite provar que o limite existe. Assim, esse procedimento apresenta o perigo de atribuir um valor a um limite inexistente.

Theorem

Seja c um ponto crítico de f , com f contínua em (a, b) contendo c e derivável em (a, b) , menos possivelmente em $x = c$. Então,

- (i) se $f'(x) > 0$ em (a, c) e $f'(x) < 0$ em $(c, b) \Rightarrow f$ tem um máximo relativo em c ;*
- (ii) se $f'(x) < 0$ em (a, c) e $f'(x) > 0$ em $(c, b) \Rightarrow f$ tem um mínimo relativo em c ;*
- (iii) se $f'(x) < 0$ em (a, c) e $f'(x) < 0$ em (c, b) , então não tem extremo em c ;*
- (iv) se $f'(x) > 0$ em (a, c) e $f'(x) > 0$ em (c, b) , então não tem extremo em c .*

Exemplo

Achar os pontos de máximo local de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \exists \forall x, f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos são $x = 1$ e $x = 3$ e não há descontinuidades. Isto significa que f' pode mudar de sinal apenas nesses pontos.

Exemplo (continuação)

Analisemos o sinal de f' nos intervalos:

- $x = 0 \in (-\infty, 1)$: $f'(0) = 9 > 0$
- $x = 2 \in (1, 3)$: $f'(2) = -3 < 0$
- $x = 4 \in (3, \infty)$: $f'(4) = 9 > 0$

Exemplo (continuação)

Analisemos o sinal de f' nos intervalos:

- $x = 0 \in (-\infty, 1)$: $f'(0) = 9 > 0$
- $x = 2 \in (1, 3)$: $f'(2) = -3 < 0$
- $x = 4 \in (3, \infty)$: $f'(4) = 9 > 0$

Portanto:

- $f'(x) > 0 \forall x < 1$
- $f'(x) < 0 \forall 1 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \forall x > 3$

Exemplo (continuação)

Analisemos o sinal de f' nos intervalos:

- $x = 0 \in (-\infty, 1)$: $f'(0) = 9 > 0$
- $x = 2 \in (1, 3)$: $f'(2) = -3 < 0$
- $x = 4 \in (3, \infty)$: $f'(4) = 9 > 0$

Portanto:

- $f'(x) > 0 \forall x < 1$
- $f'(x) < 0 \forall 1 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \forall x > 3$

f é crescente em $(-\infty, 1)$, decrescente em $(1, 3)$ e crescente em $(3, \infty)$.

Exemplo (continuação)

Analisemos o sinal de f' nos intervalos:

- $x = 0 \in (-\infty, 1)$: $f'(0) = 9 > 0$
- $x = 2 \in (1, 3)$: $f'(2) = -3 < 0$
- $x = 4 \in (3, \infty)$: $f'(4) = 9 > 0$

Portanto:

- $f'(x) > 0 \forall x < 1$
- $f'(x) < 0 \forall 1 < x < 3$
- $f'(x) > 0 \forall x > 3$

f é crescente em $(-\infty, 1)$, decrescente em $(1, 3)$ e crescente em $(3, \infty)$.
Como f' troca de sinal de positivo para negativo em $x = 1$, f tem um máximo local em $x = 1$, e como f' troca de sinal de negativo para positivo em $x = 3$, f tem um mínimo local em $x = 3$.

Theorem

Seja c um ponto crítico de f em $I = (a, b)$ no qual $f'(c) = 0$ e $f'(x)$ existe em (a, b) . Então, se $f''(c)$ existe:

- (i) se $f''(c) > 0$, f tem um mínimo relativo em c ;*
- (ii) se $f''(c) < 0$, f tem um máximo relativo em c ;*
- (iii) se $f''(c) = 0$, nada se pode afirmar.*

Exemplo

Determine os extremos relativos de $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 2$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x^2 + x - 2) \Rightarrow \exists \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

- $f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo
- $f''(1) = 12 + 8 - 8 = 12 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo
- $f''(-2) = 48 - 16 - 8 = 24 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo

Observação: Em funções contínuas, máximos e mínimos relativos tem que aparecer alternando.

Determine os extremos relativos de $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow \exists \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \text{ em } x = 0.$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \text{nada se conclui.}$$

Mas pelo critério da primeira derivada:

$$f'(x) < 0 \quad \forall \quad x < 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall \quad x > 0$$

$\Rightarrow$ mínimo local.

Gráfico de $f(x) = x^4$

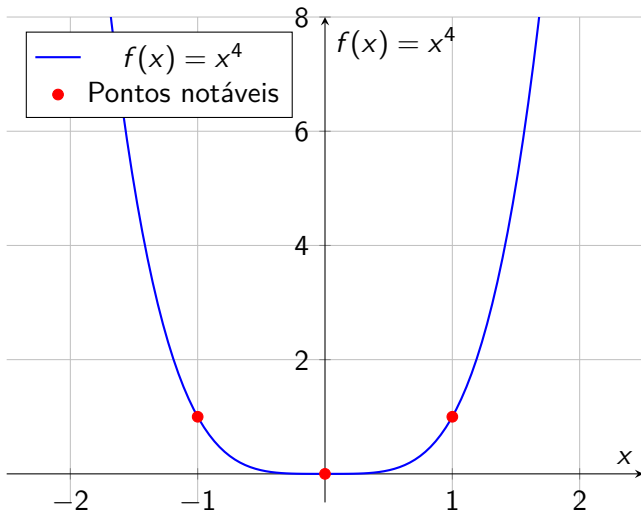


Figura: Gráfico da função $f(x) = x^4$.

Determine os extremos relativos de $f(x) = -x^4$

$$f'(x) = -4x^3 \quad \exists \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \text{ em } x = 0.$$

$$f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \text{nada se conclui}$$

Mas pelo critério da primeira derivada:

$$f'(x) > 0 \quad \forall \quad x < 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall \quad x > 0$$

$\Rightarrow$ máximo local

Exemplo

Determine os extremos relativos de $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \exists \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \text{ em } x = 0.$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \text{nada se conclui.}$$

Mas pelo critério da primeira derivada:

$$f'(x) > 0 \quad \forall \quad x > 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall \quad x < 0$$

$\Rightarrow$ nem máximo nem mínimo.

Gráfico de $f(x) = x^3$

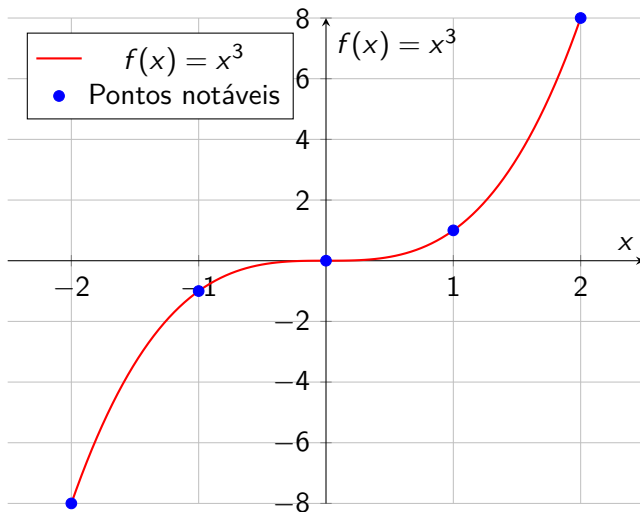


Figura: Gráfico da função $f(x) = x^3$.

Theorem

Se c for um ponto crítico de f com $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, e se as primeiro n derivadas de f em c existem, podemos afirmar: se $f^{(i)}(c) = 0$ ($\forall i < n$) e se $f^{(n)}(c) \neq 0$ (i.e., a n -ésima derivada é a primeira não nula em c), então

(a) se n for par,

(i) Se $f^{(n)}(c) > 0$, f tem um mínimo relativo em c ;

(ii) Se $f^{(n)}(c) < 0$, f tem um máximo relativo em c ;

(b) se n for ímpar, f não possui um extremo em c .

Determine os extremos relativos de $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3 \quad \exists \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \text{ em } x = 0.$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \text{nada se conclui.}$$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$$

Como a quarta derivada é a primeira não nula no ponto $x = 0$, sendo 4 um número par, podemos julgá-la como se fosse a segunda derivada. Assim, $f^{(4)}(0) = 24 > 0 \Rightarrow$ mínimo local.

Determine os extremos relativos de $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \exists \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \text{ em } x = 0.$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow \text{nada se conclui.}$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$$

Como a terceira derivada é a primeira não nula no ponto $x = 0$, sendo 3 um número ímpar, concluímos que a função não possui um extremo nesse ponto.

Observação sobre extremos relativos

Em funções contínuas, máximos e mínimos relativos tem que aparecer alternando. Não é possível uma função contínua apresentar dois máximos locais sem que haja um mínimo local entre eles.

Definição

O gráfico de uma função f é côncavo para cima [para baixo] em $x = c$ se existe $f'(c)$ e se existe um intervalo aberto I contendo c tal que para todos $x \neq c$ em I , o ponto $(x, f(x))$ está acima [abaixo] da reta tangente ao gráfico em $x = c$.

Concavidade e segunda derivada

Observação

Concavidade para cima [baixo] significa derivada crescente [decrecente], i.e., $\{f'(x)\}' > 0$ [$\{f'(x)\}' < 0$] ou seja, $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$]. Portanto, o sinal da segunda derivada determina a concavidade.

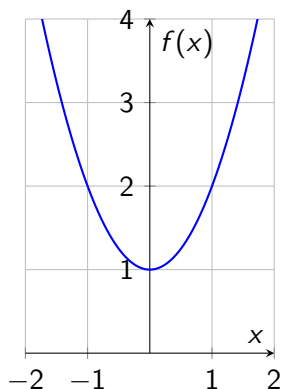
Theorem

Se f' é derivável em (a, b) contendo c , então se $f''(c) > 0$ [$f''(c) < 0$] o gráfico de f é côncavo para cima [para baixo] em c .

O gráfico de uma função f é dita côncavo para cima [baixo] em um intervalo I se a sua derivada for crescente [decrecente] em todos os pontos $x \in I$.

Exemplos de concavidade

Função Côncava para Cima



Função Côncava para Baixo

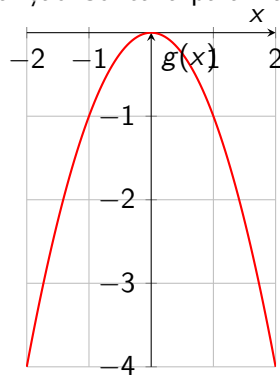


Figura: Exemplos de funções côncavas para cima e para baixo

Observação sobre concavidade e extremos

Notamos que em um mínimo local, o gráfico da função é côncavo para cima, enquanto em um máximo local, o gráfico é côncavo para baixo.

Definição

Um ponto onde o gráfico não é côncavo para cima nem para baixo se chama ponto de inflexão. Em volta dele, existe um intervalo (a, b) tal que:

- i) $f'' < 0, x \in (a, c)$ e $f'' > 0, x \in (c, b)$, ou
- ii) $f'' > 0, x \in (a, c)$ e $f'' < 0, x \in (c, b)$.

Em outras palavras, um ponto de inflexão é um ponto onde a concavidade da função muda.

Pontos de inflexão

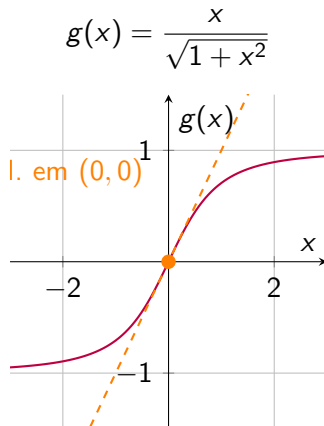
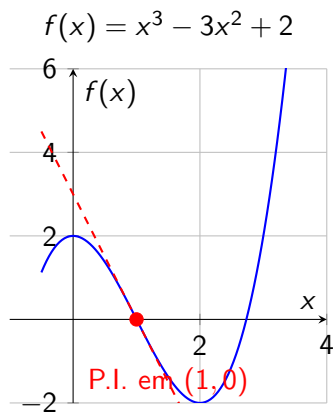


Figura: Exemplos de funções não triviais com pontos de inflexão

Importante sobre pontos de inflexão

Um ponto somente é considerado ponto de inflexão se ele fizer parte do domínio da função.

Importante sobre pontos de inflexão

Um ponto somente é considerado ponto de inflexão se ele fizer parte do domínio da função.

A concavidade da função $f(x) = 1/(x - 1)$ muda em $x = 1$. Porém, este ponto não é um ponto de inflexão dessa função, porque não pertence ao seu domínio.

Função Racional $f(x) = \frac{1}{x-1}$

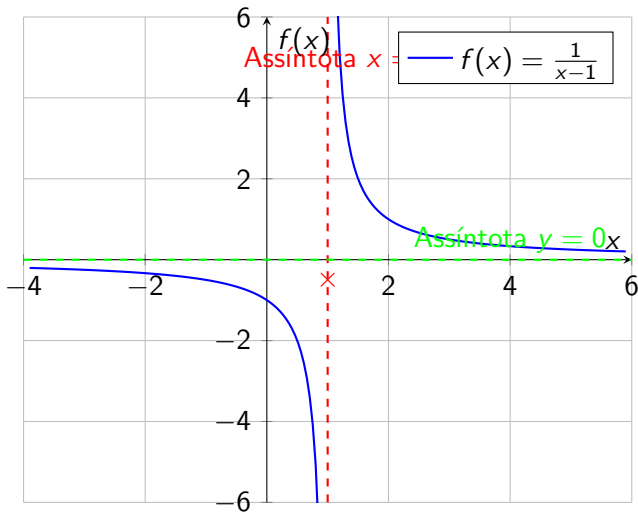


Figura: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ com suas assíntotas

Teorema sobre pontos de inflexão

Pontos de inflexão: Onde a derivada para de crescer e começa a decrescer, ou vice e versa.

⇒ Pontos de inflexão são extremos da derivada f' .

Theorem

Seja f derivável em (a, b) contendo c . Se f tem um ponto de inflexão em c , então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Observação

Note que o reverso não vale! A derivada segunda pode ser zero em outros pontos que não são pontos de inflexão! Além disso, a derivada segunda pode não existir em pontos de inflexão.

Critérios para pontos de inflexão

Para localizar pontos de inflexão

Precisamos primeiro localizar os pontos críticos da derivada, i.e., pontos onde a derivada da derivada, ou seja, a segunda derivada, for nula ou inexistente.

Critério da segunda derivada

Um ponto crítico da derivada, c , é um ponto de inflexão se e somente se

- (i) $f''(x) > 0 \forall x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0 \forall x \in (c, b)$, ou
- (ii) $f''(x) < 0 \forall x \in (a, c)$ e $f''(x) > 0 \forall x \in (c, b)$,

i.e., se a segunda derivada troca de sinal em torno do ponto c .

Critério da terceira derivada

Um ponto crítico da derivada, c , com $f''(c) = 0$ é um ponto de inflexão de f se e somente se

- (i) $f'''(c) \neq 0$, ou
- (ii) $f^{(j)}(c) = 0 \forall 3 \leq j < n$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$ com n ímpar.

Exemplo 12

Encontre os pontos de inflexão da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ e determine as regiões onde o gráfico da função é côncavo para cima ou para baixo.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(x) = 0 \text{ em } x = 2$$

Crítério da segunda derivada:

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & x < 2 \\ f''(x) > 0 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ponto de inflexão!}$$

Alternativa: Crítério da terceira derivada:

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{ponto de inflexão!}$$

Exemplo 12 (continuação)

Notamos que $f(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$, pois f'' é negativa para todos os valores de x nesse intervalo, e f é côncava para cima em $(2, \infty)$, pois $f''(x) > 0 \forall x \in (2, \infty)$.

Exemplo 13

Encontre os pontos de inflexão da função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e determine as regiões onde o gráfico da função é côncavo para cima ou para baixo.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(x) = 0 \text{ não ocorre, } f'' \text{ não existe e}$$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \forall x < 0 \\ f''(x) < 0 & \forall x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ é ponto de inflexão, pois $f(0) = 0$ existe.

Notamos que $f(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e côncava para baixo em $(0, \infty)$.

Esboço do gráfico de uma função

Procedimento

Para esboçar um gráfico de uma função, procedemos reunindo as seguintes informações:

- (a) O domínio $\mathbb{D}$ da função
- (b) As simetrias (f é par ou ímpar?)
- (c) Os interceptos da função, i.e., as suas interseções com os eixos
- (d) As assíntotas da função
- (e) Os extremos
- (f) Os pontos de inflexão
- (g) A imagem da função

Exemplo 14

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$

- **Domínio:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- **Simetria:** $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ é ímpar
- **Interceptos:** $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$
- **Descontinuidades:** não existem

Exemplo (continuação)

Intervalo:	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f em um ponto:	$f(-2) = -2 < 0$	$f(-1) = 2 > 0$	$f(1) = -2 < 0$	$f(2) = 2 > 0$
Sinal no intervalo:	-	+	-	+

- **Assíntotas:** Não tem assíntotas verticais.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ não tem assíntotas horizontais

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \infty \Rightarrow$ não tem assíntotas oblíquas

Exemplo 14 (continuação)

- **Extremos e monotonia:** $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$
- **Pontos críticos:** $f'(x) = 0$ em $x = \pm 1$
- $f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo
- $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo
- **Monotonia:**
 - $f'(x) > 0$ para $|x| > 1 \Rightarrow$ crescente em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$
 - $f'(x) < 0$ para $|x| < 1 \Rightarrow$ decrescente em $(-1, 1)$
- **Valores:** $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$

Exemplo 14 (continuação)

- **Pontos de inflexão e concavidade:** $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$
- **Pontos críticos da derivada:** $f''(x) = 0$ em $x = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$
- $\Rightarrow f$ tem um ponto de inflexão em $x = 0$
- **Concavidade:**
 - $f''(x) < 0$ para $x < 0 \Rightarrow$ côncava para baixo
 - $f''(x) > 0$ para $x > 0 \Rightarrow$ côncava para cima
- **Gráfico e imagem:**
 - Valores: $f(-\sqrt{3}) = 0$, $f(\sqrt{3}) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$
 - Imagem: $\mathbb{V} = \mathbb{R}$

Problemas de Otimização

- Problemas de otimização são aqueles onde se tenta encontrar um extremo absoluto específico (mínimo ou máximo) de uma função.

- Problemas de otimização são aqueles onde se tenta encontrar um extremo absoluto específico (mínimo ou máximo) de uma função.
- Na prática porém, eles vêm em forma de um problema do dia-a-dia, como por exemplo, encontrar o menor custo de um produto, minimizar o tempo de uma viagem ou maximizar a capacidade de um recipiente.

Problemas de Otimização

- Problemas de otimização são aqueles onde se tenta encontrar um extremo absoluto específico (mínimo ou máximo) de uma função.
- Na prática porém, eles vêm em forma de um problema do dia-a-dia, como por exemplo, encontrar o menor custo de um produto, minimizar o tempo de uma viagem ou maximizar a capacidade de um recipiente.
- Precisa-se da parametrização do problema.

Qual é o retângulo com maior área, com perímetro (soma dos comprimentos dos lados) fixo?

Exemplo

Qual é o retângulo com maior área, com perímetro (soma dos comprimentos dos lados) fixo?

Área do retângulo: $A = x \cdot y$, onde x e y são as laterais.

Exemplo

Qual é o retângulo com maior área, com perímetro (soma dos comprimentos dos lados) fixo?

Área do retângulo: $A = x \cdot y$, onde x e y são as laterais.

Perímetro fixo: $2x + 2y = c \Rightarrow y = \frac{c}{2} - x \Rightarrow A = x \cdot \left(\frac{c}{2} - x\right) = \frac{cx}{2} - x^2$

Exemplo

Qual é o retângulo com maior área, com perímetro (soma dos comprimentos dos lados) fixo?

Área do retângulo: $A = x \cdot y$, onde x e y são as laterais.

Perímetro fixo: $2x + 2y = c \Rightarrow y = \frac{c}{2} - x \Rightarrow A = x \cdot (\frac{c}{2} - x) = \frac{cx}{2} - x^2$

Maximizar: Encontrar o máximo absoluto de $A(x)$ no intervalo: $[0, \frac{c}{2}]$
 $A'(x) = \frac{c}{2} - 2x$ sempre existe, $A'(x) = 0$ em $\frac{c}{2} - 2x = 0$, ou seja, $x = \frac{c}{4}$.

Comparando os valores: $A(0) = A(\frac{c}{2}) = 0 < A(\frac{c}{4}) = \frac{c^2}{16}$

Portanto o valor máximo encontra-se em $x = \frac{c}{4}$. Nesse ponto, temos $y = \frac{c}{2} - x = \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{4}$, máximo absoluto i.e., o retângulo com a maior área é o quadrado com laterais $x = y = \frac{c}{4}$.

Um fazendeiro tem material para 12m de cerca para fazer um cercado para as suas cabras atrás das sua casa, usando a parede da casa como uma limitação. Qual será a área máxima possível do cercado?

Exemplo

Um fazendeiro tem material para 12m de cerca para fazer um cercado para as suas cabras atrás das sua casa, usando a parede da casa como uma limitação. Qual será a área máxima possível do cercado?

Área do cercado: $A = x \cdot y$ onde $y = L - 2x = 12 - 2x$ com L o comprimento fixo de 12m. Ver a figura no próximo slide.

Intervalo: $I = [0, 6]$.

$A(x) = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2$, $A'(x) = 12 - 4x \Rightarrow A'(x) = 0$ em $12 = 4x$, ou seja, $x = 3$.

$A''(x) = -4$. Assim, temos $A''(3) = -4 < 0$. Portanto, a função tem um máximo relativo nesse ponto.

Concluimos que cercado deve ter as dimensões $x = 3$ m e $y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$ m, de modo que a área seja $A = 3 \cdot 6 = 18 \text{ m}^2$.

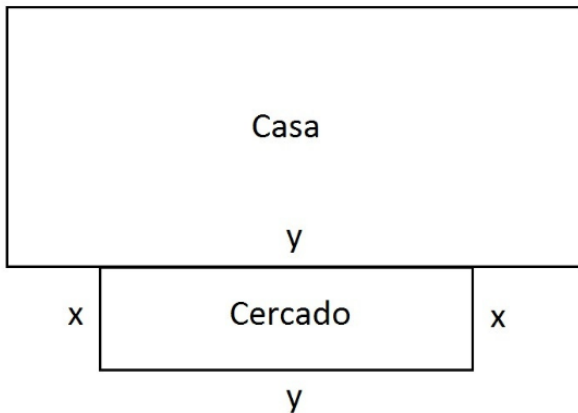


Figura: $12 = 2x + y$

Considere as funções $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x + 25$ e $g(x) = 4x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 6x + 10$. Encontre a menor distância vertical entre os seus gráficos.

A distância vertical $v(x)$ entre os gráficos das funções f e g é dada pela sua diferença. Assim, temos

$$v(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 15$$

cuja derivada é

$$v'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

O intervalo de busca é $\mathbb{R}$. A derivada existe em todo intervalo. Ela é nula em

$$v'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad e \quad x = \pm 1$$

Comparando os valores:

$$v(0) = 15, \quad v(-1) = 14, \quad v(1) = 14$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = \infty$$

Concluimos que a distância vertical é mínima em $x = 1$ e $x = -1$, sendo nos dois pontos $v(1) = v(-1) = 14$

Um produtor de caixas tem que fornecer caixas fechadas de base quadrada de volume de 2000 cm^3 , com materiais diferentes para base e tampa e para as paredes laterais. O material da tampa e da base custa 3 centavos por cm^2 , enquanto o das paredes custa 1.5 centavos por cm^2 (ver Figura à frente). Que dimensões da caixa minimizam o custo?

Um produtor de caixas tem que fornecer caixas fechadas de base quadrada de volume de 2000 cm^3 , com materiais diferentes para base e tampa e para as paredes laterais. O material da tampa e da base custa 3 centavos por cm^2 , enquanto o das paredes custa 1.5 centavos por cm^2 (ver Figura à frente). Que dimensões da caixa minimizam o custo?

Usamos a letra x para designar a extensão lateral da base e a letra y para denotar a altura da caixa. Observando que a área da base e da tampa será x^2 e a área de uma lateral será $x \cdot y$, obtemos que a função custo pode ser representada por:

Função custo:

$$C = 3 \cdot (2 \cdot x^2) + 1.50 \cdot 4xy = 6x^2 + 6xy.$$

Volume fixo:

$$V = x \cdot x \cdot y = 2000 \Rightarrow y = \frac{2000}{x^2}$$

Assim,

$$C(x) = 6x^2 + 6x \cdot \frac{2000}{x^2} = 6x^2 + \frac{12000}{x}$$

Intervalo: $(0, \infty)$

$$C'(x) = 12x - \frac{12000}{x^2}$$

Pontos críticos:

$$12x = \frac{12000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10.$$

Exemplo (continuação)

O valor da função no ponto $x = 10$:

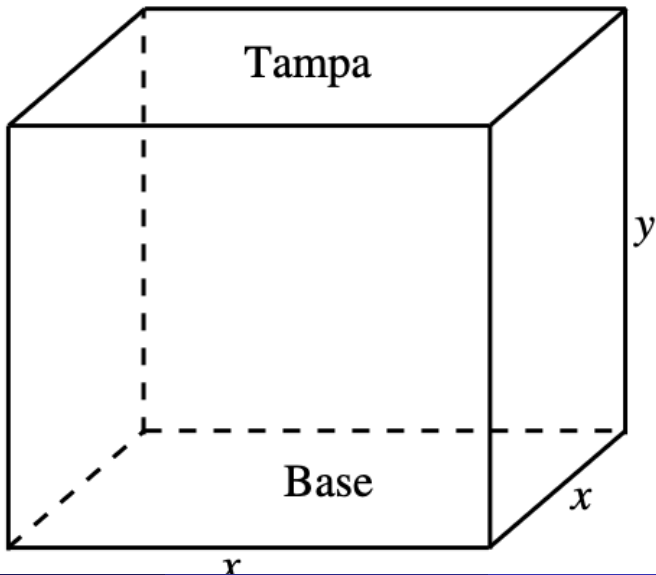
$$C(10) = 600 + \frac{12000}{10} = 600 + 1200 = 1800$$

Limites nas pontas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \infty$$

Portanto, o custo é mínimo para $x = 10$, já que os limites nas pontas do intervalo são maiores do que o valor no ponto crítico.

Assim, a caixa com base de 10 cm e altura de 20 cm, tem o custo mínimo de R\$ 18,00 por caixa.



Exemplo

Encontre o(s) valor (es) de $x \in [1, 7]$ que maximize (m) a área do triângulo ABC entre os pontos $A = (x, 0)$, $B = (7, 0)$ e $C = (x, f(x))$ com $f(x) = 9 + (x - 1)^2$.

Área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2}b \cdot h, \text{ onde } b = 7 - x \text{ e } h = f(x) = 9 + (x - 1)^2.$$

Portanto,

$$A(x) = \frac{1}{2}(7 - x)[9 + (x - 1)^2] = \frac{1}{2}[-x^3 + 9x^2 - 24x + 70]$$

Derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{2}[-3x^2 + 18x - 24] = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \quad \text{i.e., } x = 2 \quad \text{e} \quad x = 4.$$

Exemplo (continuação)

Calculando os valores da área nos pontos críticos:

$$A(1) = 27 \quad A(2) = 25 \quad A(4) = 27 \quad A(7) = 0$$

Concluimos que $A(1) = A(4) > A(2) > A(7)$. Portanto, a área do triângulo é máxima para $x = 1$ e $x = 4$, com o valor de $A = 27$.

Resumo da localização de extremos absolutos

Para encontrar extremos absolutos de uma função em um intervalo dado:

Resumo da localização de extremos absolutos

Para encontrar extremos absolutos de uma função em um intervalo dado:

- ① Cálculo da derivada da função e determinação dos pontos críticos no intervalo:
 - Pontas do intervalo
 - Pontos com derivada nula
 - Pontos com derivada inexistente

Resumo da localização de extremos absolutos

Para encontrar extremos absolutos de uma função em um intervalo dado:

- ① Cálculo da derivada da função e determinação dos pontos críticos no intervalo:
 - Pontas do intervalo
 - Pontos com derivada nula
 - Pontos com derivada inexistente
- ② Avaliação dos pontos críticos:
 - Cálculo dos valores da função, onde possível
 - Cálculo dos limites laterais nas pontas de intervalos abertos e nas descontinuidades
 - Comparação dos valores obtidos

Resumo da localização de extremos absolutos

Para encontrar extremos absolutos de uma função em um intervalo dado:

- ① Cálculo da derivada da função e determinação dos pontos críticos no intervalo:
 - Pontas do intervalo
 - Pontos com derivada nula
 - Pontos com derivada inexistente
- ② Avaliação dos pontos críticos:
 - Cálculo dos valores da função, onde possível
 - Cálculo dos limites laterais nas pontas de intervalos abertos e nas descontinuidades
 - Comparação dos valores obtidos

Alternativa

No caso de um único ponto crítico de uma função contínua no interior do intervalo: se for extremo relativo, será também extremo absoluto do mesmo tipo.