

Integrais Impróprias

Intervalos Infinitos e Singularidades

Cristian F. Coletti

UFABC

Terceiro Quadrimestre 2025

Problema

Como definir e calcular integrais quando:

- O intervalo de integração é infinito
- A função não está definida em algum ponto do intervalo

Exemplos

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Integrais em Intervalos Infinitos - Tipo I

Definição 1: $[a, \infty)$

Se f é contínua em $[a, \infty)$, então:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Se o limite existe (é finito), dizemos que a integral **converge**.

Exemplo 1.1

Calcule $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \end{aligned}$$

Integrais em Intervalos Infinitos - Tipo II

Definição 2: $(-\infty, b]$

Se f é contínua em $(-\infty, b]$, então:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Definição 3: $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Integral em $(-\infty, \infty)$

Exemplo 1.2

Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^b \\&= \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \arctan a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - 0) \\&= (0 - (-\frac{\pi}{2})) + (\frac{\pi}{2} - 0) = \pi\end{aligned}$$

Visualização Gráfica - Intervalos Infinitos

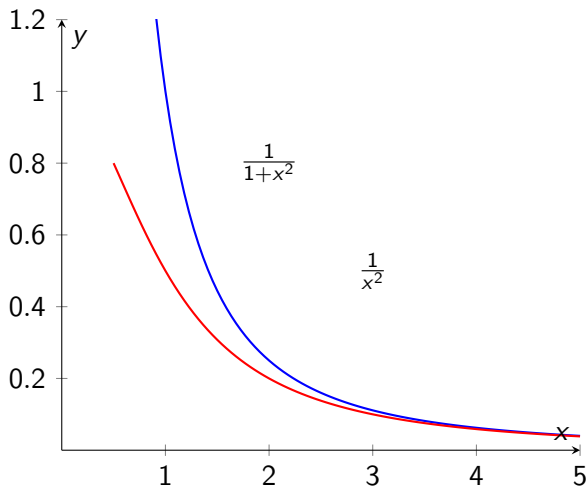


Figura: Área sob a curva em intervalos infinitos

Integrais com Singularidades - Tipo I

Definição 4: Descontinuidade em a

Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a , então:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Exemplo 2.1

Calcule $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-1/2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{t}) = 2 \end{aligned}$$

Converge para 2

Integrais com Singularidades - Tipo II

Definição 5: Descontinuidade em b

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b , então:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Exemplo 2.2

Calcule $\int_0^1 \ln x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} [(1 \cdot 0 - 1) - (t \ln t - t)] \\ &= -1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = -1 \end{aligned}$$

Integrais com Singularidade Interna

Definição 6: Descontinuidade em $c \in (a, b)$

Se f é descontínua em $c \in (a, b)$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

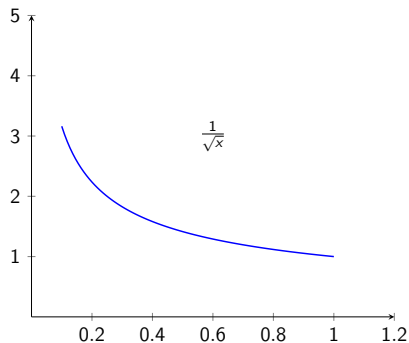
onde cada integral é definida pelos limites apropriados.

Exemplo 2.3

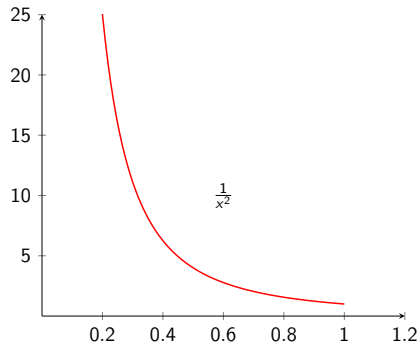
Calcule $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2} dx + \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^2 x^{-2} dx \end{aligned}$$

Visualização Gráfica - Singularidades



Converge



Diverge em $[0, 1]$

Teorema da Comparação

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$, então:

- Se $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x) dx$ converge
- Se $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge, então $\int_a^\infty g(x) dx$ diverge

Exemplo 3.1

Determine se $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ converge.

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, a integral dada também converge.

Exemplo com Soma de Riemann

Aproximação de $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Usando $n = 4$ subintervalos em $[1, 5]$:

i	$[x_{i-1}, x_i]$	x_i^*	$f(x_i^*)\Delta x$
1	$[1, 2]$	1.5	$\frac{1}{(1.5)^2} \cdot 1 = 0.444$
2	$[2, 3]$	2.5	$\frac{1}{(2.5)^2} \cdot 1 = 0.160$
3	$[3, 4]$	3.5	$\frac{1}{(3.5)^2} \cdot 1 = 0.082$
4	$[4, 5]$	4.5	$\frac{1}{(4.5)^2} \cdot 1 = 0.049$

$$R_4 = 0.444 + 0.160 + 0.082 + 0.049 = 0.735$$

Valor exato = 1 (no intervalo $[1, \infty)$)

Casos Especiais Importantes

Integral p

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{converge se } p > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \quad \text{converge se } p < 1$$

Exemplos

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1.1}} dx$: Converge ($p = 1.1 > 1$)
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{0.9}} dx$: Diverge ($p = 0.9 < 1$)
- $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.5}} dx$: Converge ($p = 0.5 < 1$)
- $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.5}} dx$: Diverge ($p = 1.5 > 1$)

Resumo e Considerações Finais

Quando uma Integral Imprópria Converge?

- **Intervalo infinito:** Se o limite existe e é finito
- **Singularidade:** Se os limites laterais existem e são finitos
- **Múltiplos problemas:** Se cada parte separadamente converge

Cuidados Importantes

- Sempre verificar o domínio da função
- Identificar todos os pontos problemáticos
- Usar limites para abordar singularidades
- Em caso de dúvida, dividir a integral em partes

Fórmulas Úteis

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{a^{1-p}}{p-1} \quad (p > 1)$$