Análise de Funções, Extremos, Concavidade e Assíntotas

Fuv:Teoria e exemplos

Cristian F. Coletti

16 de outubro de 2026

Roteiro da Apresentação

1. Pontos Críticos e Teorema de Fermat
2. Extremos em Intervalos Fechados, Abertos e na Reta Real
3. Teste da 1ª Derivada: Teoria, Prova e Exemplos
4. Teste da 2ª Derivada: Teoria, Prova e Exemplos
5. Concavidade e Pontos de Inflexão (com gráficos)
6. Assíntotas Verticais (3 Exemplos)
7. Assíntotas Horizontais (4 Exemplos)
8. Assíntotas Oblíquas (2 Exemplos)

Pontos Críticos

Definição de Ponto Crítico

Definição Formal

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I. Um ponto $c \in \text{int}(I)$ é denominado **ponto crítico** (ou ponto estacionário) de f se:

$$f'(c) = 0.$$

- O ponto crítico é necessariamente um ponto do **domínio** da função.
- Pontos onde f não está definida **não** são pontos críticos.
- Se f possui um extremo local em c, então c é obrigatoriamente um ponto crítico (Teorema de Fermat).

Ponto Crítico: Exemplo com $f'(c) = 0$

Exemplo 1.1: Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ em $\mathbb{R}$.

- Calculando a derivada:
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$
- Impondo $f'(x) = 0$:
$$3x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 2.$$
- Como f é diferenciável em toda a reta, os únicos pontos críticos são $x = 0$ e $x = 2$.

Extremos Absolutos e Locais

Método do Intervalo Fechado $[a, b]$

Teorema de Weierstrass (Valor Extremo)

Toda função contínua em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ atinge um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto.

Algoritmo prático:

1. Encontre todos os pontos críticos $c_1, c_2, \cdots \in (a, b)$.
2. Calcule os valores da função nesses pontos: $f(c_i)$.
3. Calcule os valores da função nos extremos do intervalo: $f(a)$ e $f(b)$.
4. O maior valor dentre $\{f(c_i), f(a), f(b)\}$ é o **máximo absoluto**; o menor é o **mínimo absoluto**.

Exemplo: Intervalo Fechado $[a, b]$

Exemplo 2.1: Determinar os extremos absolutos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ em $[-2, 3]$.

1. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1) = 0$.
2. Pontos críticos em $(-2, 3)$: $x = -1$ e $x = 2$.
3. Avaliação nos pontos críticos e nas extremidades:

$$f(-2) = 2(-8) - 3(4) - 12(-2) + 1 = -16 - 12 + 24 + 1 = -3$$
$$f(-1) = 2(-1) - 3(1) - 12(-1) + 1 = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$$
$$f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 1 = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$$
$$f(3) = 2(27) - 3(9) - 12(3) + 1 = 54 - 27 - 36 + 1 = -8$$

4. **Máximo absoluto:** 8 (em $x = -1$). **Mínimo absoluto:** -19 (em $x = 2$).

Método em Intervalos Abertos (a, b) ou em $\mathbb{R}$

Em intervalos abertos, o Teorema de Weierstrass não se aplica diretamente. **Estratégia:**

1. Determinar todos os pontos críticos $c \in (a, b)$.
2. Estudar o sinal de $f'(x)$ (intervalos de crescimento/decrescimento).
3. Calcular os limites nos bordos do intervalo:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^- f(x)} \quad (\text{ou } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \text{ se o domínio for } \mathbb{R}).$$

4. Comparar o valor nos pontos críticos com os limites assintóticos para atestar se o extremo local é de fato global.

Exemplo: Intervalo Aberto / Reta Real $\mathbb{R}$

Exemplo 2.2: Encontrar os extremos globais de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ em $\mathbb{R}$.

1. Derivada: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
2. Ponto crítico: $f'(x) = 0 \implies x = 0$.
3. Valor no ponto crítico: $f(0) = 1$.
4. Limites nos extremos do domínio $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

5. Como $0 < f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:
   - **Máximo global:** $y = 1$ em $x = 0$.
   - **Mínimo global:** Não existe (a função tem ínfimo 0, mas nunca o atinge).

Teste da Primeira Derivada

Enunciado do Teste da Primeira Derivada

Seja f contínua em um intervalo I e diferenciável em $I \setminus \{c\}$, onde c é um ponto crítico:

- **Máximo Local:** Se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c, então $f(c)$ é um valor de **máximo local**.
- **Mínimo Local:** Se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c, então $f(c)$ é um valor de **mínimo local**.
- **Sem Extremo:** Se $f'(x)$ mantiver o mesmo sinal em ambos os lados de c, então c **não é** ponto de extremo local.

Prova do Teste da 1ª Derivada via TVM

Demonstração (caso de Máximo Local): Suponha que exista $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ em $(c-\delta, c)$ e $f'(x) < 0$ em $(c, c+\delta)$.

1. Para qualquer $x \in (c-\delta, c)$, pelo Teorema do Valor Médio em $[x, c]$:

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(\xi_1), \quad \text{com } \xi_1 \in (x, c).$$

   Como $\xi_1 \in (c-\delta, c)$, $f'(\xi_1) > 0$. Como $c - x > 0$, segue que:

$$f(c) - f(x) > 0 \implies f(x) < f(c).$$

2. Para qualquer $x \in (c, c+\delta)$, pelo TVM em $[c, x]$:

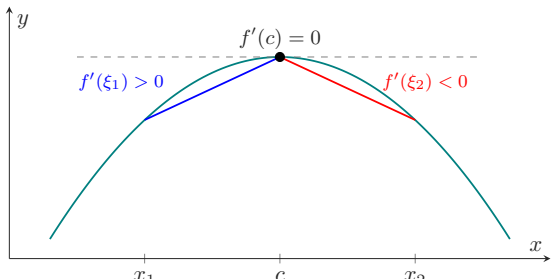
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi_2), \quad \text{com } \xi_2 \in (c, x).$$

   Como $\xi_2 \in (c, c+\delta)$, $f'(\xi_2) < 0$. Como $x - c > 0$, segue que:

$$f(x) - f(c) < 0 \implies f(x) < f(c).$$

Logo, $f(x) \leq f(c)$ em $(c-\delta, c+\delta)$, provando o máximo local. ■

Ilustração Geométrica da Prova: TVM e 1ª Derivada



À esquerda de c, a inclinação da secante $f'(\xi_1)$ é positiva (f sobe até $f(c)$); à direita, a inclinação $f'(\xi_2)$ é negativa (f desce a partir de $f(c)$).

Exemplo 3.1: Máximo e Mínimo via 1ª Derivada

Seja $f(x) = x^4 - 4x^3$ em $\mathbb{R}$.

- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.
- Pontos críticos: $x = 0$ e $x = 3$.
- Análise de sinal em torno de $x = 0$:
  - Para $x < 0$: $4x^2 > 0$ e $(x-3) < 0 \implies f'(x) < 0$ (decrescente).
  - Para $0 < x < 3$: $4x^2 > 0$ e $(x-3) < 0 \implies f'(x) < 0$ (decrescente).
  - Não há mudança de sinal em $x = 0 \implies$ **não é extremo**.
- Análise de sinal em torno de $x = 3$:
  - Para $x < 3$: $f'(x) < 0$ (decrescente).
  - Para $x > 3$: $4x^2 > 0$ e $(x-3) > 0 \implies f'(x) > 0$ (crescente).
  - O sinal muda de $-$ para $+ \implies x = 3$ é **mínimo local** ($f(3) = -27$).

Teste da Segunda Derivada

Enunciado do Teste da Segunda Derivada

Seja f uma função duas vezes diferenciável em um intervalo aberto contendo c, com $f'(c) = 0$:

- **Mínimo Local:** Se $f''(c) > 0$, então f tem um valor de **mínimo local** em c.
- **Máximo Local:** Se $f''(c) < 0$, então f tem um valor de **máximo local** em c.
- **Inconclusivo:** Se $f''(c) = 0$, o teste é **inconclusivo** (pode ser máximo, mínimo ou nenhum dos dois; deve-se usar o teste da 1ª derivada).

Prova do Teste da 2ª Derivada via Limites

Demonstração (caso $f''(c) > 0$): Pela definição da segunda derivada em c, sabendo que $f'(c) = 0$:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

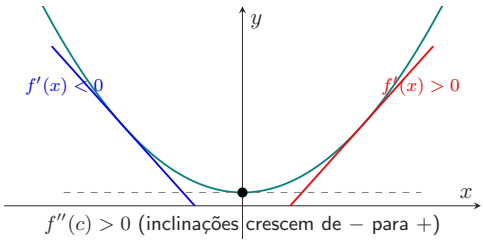
Como $f''(c) > 0$, pela propriedade da conservação do sinal de limites, existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < |x - c| < \delta$:

$$\frac{f'(x)}{x - c} > 0.$$

- Se $x \in (c - \delta, c)$, então $x - c < 0$. Para que o quociente seja positivo, devemos ter $f'(x) < 0$.
- Se $x \in (c, c + \delta)$, então $x - c > 0$. Para que o quociente seja positivo, devemos ter $f'(x) > 0$.

Logo, f' muda de sinal de negativo para positivo em c. Pelo Teste da 1ª Derivada, c é ponto de **mínimo local**. ■

Ilustração Geométrica da 2ª Derivada



$f''(c) > 0$ (inclinações crescem de $-$ para $+$)

Como $f'(x)$ é estritamente crescente na vizinhança de c, as tangentes giram no sentido anti-horário, forçando a curva a ficar acima da reta tangente.

Exemplo 4.1: Aplicação do Teste da 2ª Derivada

Seja $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

1. 1ª Derivada: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$.
2. Pontos críticos: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.
3. 2ª Derivada: $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$.
4. Avaliação nos pontos críticos:
   - $x = -1$: $f''(-1) = 30(-1)(2 - 1) = -30 < 0 \implies$ **Máximo Local**.
   - $x = 1$: $f''(1) = 30(1)(2 - 1) = 30 > 0 \implies$ **Mínimo Local**.
   - $x = 0$: $f''(0) = 0 \implies$ **Inconclusivo pelo teste da 2ª derivada**.
5. Em $x = 0$, verificando a 1ª derivada: $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1) < 0$ tanto para $x \in (-1, 0)$ quanto para $x \in (0, 1)$. Não há mudança de sinal $\implies$ $x = 0$ não é extremo.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição Geométrica de Concavidade

Seja f diferenciável em um intervalo I:

- **Côncava para Cima** ($\cup$): O gráfico de f situa-se **acima** de todas as suas retas tangentes no intervalo I. Equivalentemente, a inclinação $f'(x)$ é uma função estritamente crescente em I.

- **Côncava para Baixo** ($\cap$): O gráfico de f situa-se **abaixo** de todas as suas retas tangentes no intervalo I. Equivalentemente, a inclinação $f'(x)$ é uma função estritamente decrescente em I.

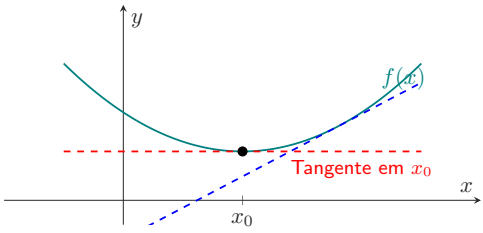
Critério da 2ª Derivada para Concavidade

Seja f duas vezes diferenciável em I:

Teorema da Concavidade

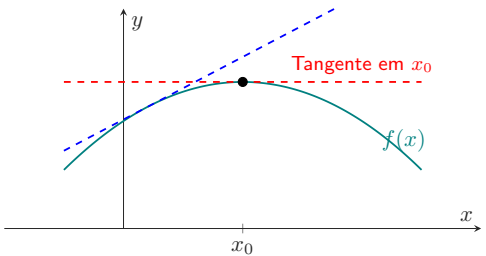
- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é **côncavo para cima** em I.
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f é **côncavo para baixo** em I.

Ilustração: Concavidade para Cima ($\cup$)



Côncava para cima: A curva fica acima de qualquer uma de suas tangentes; $f''(x) > 0$.

Ilustração: Concavidade para Baixo ($\cap$)



Côncava para baixo: A curva fica abaixo de qualquer uma de suas tangentes; $f''(x) < 0$.

Ponto de Inflexão

Definição

Um ponto $(c, f(c))$ no gráfico de uma função contínua f é denominado **ponto de inflexão** se a curva muda o sentido de sua concavidade (de para cima para para baixo, ou vice-versa) ao passar por c.

Condição Necessária: Se $(c, f(c))$ é ponto de inflexão e $f''(c)$ existe, então necessariamente:

$$f''(c) = 0.$$

Atenção: $f''(c) = 0$ não é condição suficiente. Deve haver mudança efetiva no sinal de $f''(x)$.

Exemplo 5.1: Inflexão vs. Não-Inflexão

Caso 1: $f(x) = x^3$

- $f'(x) = 3x^2$
- $f''(x) = 6x$
- $f''(0) = 0$
- Para $x < 0 \implies f''(x) < 0$ $(\cap)$
- Para $x > 0 \implies f''(x) > 0$ $(\cup)$
- **Há inflexão** em $(0, 0)$.

Caso 2: $g(x) = x^4$

- $g'(x) = 4x^3$
- $g''(x) = 12x^2$
- $g''(0) = 0$
- Para $x < 0 \implies g''(x) > 0$ $(\cup)$
- Para $x > 0 \implies g''(x) > 0$ $(\cup)$
- **Não há inflexão** em $(0, 0)$.

Assíntotas Verticais

Definição de Assíntota Vertical

Definição

A reta vertical $x = a$ é dita uma **assíntota vertical** do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Geralmente ocorrem onde o denominador de uma fração racional é zero (e o numerador não se anula), ou nos limites do domínio de funções logarítmicas.

Assíntota Vertical: Exemplo 1

Exemplo 6.1: $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Analisando os limites laterais em torno de $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{(pois o denominador tende a } 0^+\text{)}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{(pois o denominador tende a } 0^-\text{)}$$

- **Conclusão:** A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical bilateral com sinais opostos.

Assíntota Vertical: Exemplo 2

Exemplo 6.2: $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$.

- Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- O numerador tende a $1 + 1 = 2 > 0$ quando $x \to 1$.
- O denominador $(x-1)^2$ é estritamente positivo para todo $x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$$

- **Conclusão:** A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical onde ambos os lados tendem a $+\infty$.

Assíntota Vertical: Exemplo 3

Exemplo 6.3: $f(x) = \ln(x)$.

- Domínio: $(0, +\infty)$.
- A função só está definida para valores à direita de zero.
- Calculando o limite lateral:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

- **Conclusão:** A reta $x = 0$ (o eixo das ordenadas) é uma assíntota vertical unilateral à direita.

Assíntotas Horizontais

Definição de Assíntota Horizontal

Definição

A reta horizontal $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

- Uma curva pode ter no máximo duas assíntotas horizontais distintas (uma para $+\infty$ e outra para $-\infty$).
- Ao contrário das assíntotas verticais, a curva **pode cruzar** sua assíntota horizontal finitas ou infinitas vezes.

Assíntota Horizontal: Exemplo 1

Exemplo 7.1 (Graus Iguais): $f(x) = \frac{3x^2-5}{2x^2+x+1}$.

- Colocando x^2 em evidência:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(3-5/x^2)}{x^2(2+1/x+1/x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-5/x^2}{2+1/x+1/x^2} = \frac{3}{2}.$$

- **Conclusão:** A reta $y = \frac{3}{2}$ é a assíntota horizontal bilateral (tanto para $+\infty$ quanto para $-\infty$).

Assíntota Horizontal: Exemplo 2

Exemplo 7.2 (Grau do Denominador Maior): $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

- Dividindo numerador e denominador por x^2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

- **Conclusão:** A reta $y = 0$ (eixo x) é a assíntota horizontal.
- Note que $f(0) = 0$, logo a curva cruza a assíntota na origem!

Assíntota Horizontal: Exemplo 3

Exemplo 7.3 (Assíntotas Distintas em $\pm\infty$): $f(x) = \arctan(x)$.

- Analisando o comportamento da função arco-tangente no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

- **Conclusão:** Existem duas assíntotas horizontais distintas:

$$y = \frac{\pi}{2} \quad (\text{para } x \to +\infty) \quad \text{e} \quad y = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{para } x \to -\infty).$$

Assíntota Horizontal: Exemplo 4

Exemplo 7.4 (Oscilação e Interseções Infinitas): $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ para $x \neq 0$.

- Como $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, para $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

- Pelo Teorema do Confronto (Sanduíche):

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right) = 0 \implies \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0.$$

- **Conclusão:** A reta $y = 0$ é assíntota horizontal e o gráfico cruza $y = 0$ em todos os pontos $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Assíntotas Oblíquas

Definição de Assíntota Oblíqua

Definição

A reta não-vertical e não-horizontal $y = mx + b$ (com $m \neq 0$) é uma **assíntota oblíqua** de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ (ou $-\infty$) se:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Fórmulas Gerais de Cálculo:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Para funções racionais $P(x)/Q(x)$, isso ocorre quando $\text{grau}(P) = \text{grau}(Q) + 1$.

Assíntota Oblíqua: Exemplo 1 (Divisão Polinomial)

Exemplo 8.1: $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$.

1. Efetuando a divisão euclidiana de polinômios:

$$x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x+3) + 2 \implies f(x) = (x+3) + \frac{2}{x-1}.$$

2. Identificamos a reta candidata: $y = x + 3$.
3. Calculando o limite da diferença:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0.$$

4. **Conclusão:** A reta $y = x + 3$ é a assíntota oblíqua de $f(x)$ tanto para $+\infty$ quanto para $-\infty$.

Assíntota Oblíqua: Exemplo 2 (Radicais com Limites)

Exemplo 8.2: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$ para $x \to +\infty$.

1. Calculando o coeficiente angular m:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1.$$

2. Calculando o coeficiente linear b multiplicando pelo conjugado:

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 4x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x \left(\sqrt{1 + 4/x} + 1 \right)} = \frac{4}{1 + 1} = 2.$$

3. **Conclusão:** A reta $y = x + 2$ é a assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$.

Resumo Metodológico

Para um estudo completo e rigoroso de qualquer função:

1. **Domínio e Simetrias:** Identificar restrições e paridade.
2. **Assíntotas:** Verticais nos polos; Horizontais ou Oblíquas no $\pm\infty$.
3. **1ª Derivada:** Determinar pontos críticos, intervalos de crescimento/decrescimento e extremos locais.
4. **2ª Derivada:** Determinar concavidade e pontos de inflexão.
5. **Síntese Gráfica:** Integrar o quadro de sinais para obter o esboço preciso da curva.