

Gabarito Exercícios Prova 3

Cristian F. Coletti

Terceiro Quadrimestre 2025

Exercício 1 - Antiderivadas

Calcule as seguintes antiderivadas:

(a) $\int (3x^5 - 2x^3 + 7x - 4) dx$

(b) $\int \frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x}} dx$

(c) $\int e^{3x}(2x - 1) dx$

(d) $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$

(e) $\int \frac{2x^3-3x^2+4}{x^2} dx$

Gabarito - Exercício 1

(a) **Resolução:**

$$\begin{aligned}\int (3x^5 - 2x^3 + 7x - 4) dx &= 3 \int x^5 dx - 2 \int x^3 dx + 7 \int x dx - 4 \int dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^6}{6} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C \\ &= \frac{x^6}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{7x^2}{2} - 4x + C\end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Primeiro reescrevemos a expressão:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x}} &= x^{2-\frac{1}{2}} + 2x^{1-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \\ &= x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

(c) **Resolução:** Usamos integração por partes. Seja $u = 2x - 1$ e $dv = e^{3x}dx$, então $du = 2dx$ e $v = \frac{1}{3}e^{3x}$:

$$\begin{aligned}\int e^{3x}(2x - 1) dx &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 2 dx \\ &= \frac{2x - 1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{2x - 1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C \\ &= \frac{2x - 1}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C \\ &= \frac{e^{3x}}{9}(6x - 3 - 2) + C = \frac{e^{3x}}{9}(6x - 5) + C\end{aligned}$$

(d) **Resolução:** Usamos substituição $u = \ln(x)$, então $du = \frac{1}{x}dx$:

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\ln^3(x)}{3} + C$$

(e) **Resolução:** Primeiro dividimos:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = 2x - 3 + \frac{4}{x^2} = 2x - 3 + 4x^{-2}$$

$$\begin{aligned}\int (2x - 3 + 4x^{-2}) dx &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= x^2 - 3x - \frac{4}{x} + C\end{aligned}$$

Exercício 2 - Substituição (não trigonométrica)

Calcule as integrais usando substituição:

(a) $\int x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$

(b) $\int \frac{x}{x^2+4} \, dx$

(c) $\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}} \, dx$

(d) $\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}} \, dx$

(e) $\int x^3(2x^4 - 1)^5 \, dx$

Gabarito - Exercício 2

(a) **Resolução:** Seja $u = x^2 + 1$, então $du = 2x \, dx$ ou $\frac{1}{2}du = x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Seja $u = x^2 + 4$, então $du = 2x \, dx$ ou $\frac{1}{2}du = x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2 + 4} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C\end{aligned}$$

(c) **Resolução:** Seja $u = 1 + e^{2x}$, então $du = 2e^{2x} \, dx$ ou $\frac{1}{2}du = e^{2x} \, dx$:

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}} \, dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} (1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

(d) **Resolução:** Seja $u = 1 + \ln(x)$, então $du = \frac{1}{x}dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du \\ &= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(1+\ln(x))^{\frac{3}{2}} - 2(1+\ln(x))^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

(e) **Resolução:** Seja $u = 2x^4 - 1$, então $du = 8x^3 dx$ ou $\frac{1}{8}du = x^3 dx$:

$$\begin{aligned}\int x^3(2x^4 - 1)^5 dx &= \frac{1}{8} \int u^5 du = \frac{1}{8} \cdot \frac{u^6}{6} + C \\ &= \frac{1}{48}(2x^4 - 1)^6 + C\end{aligned}$$

Exercício 3 - Integração por Partes

Calcule usando integração por partes:

(a) $\int x \cos(2x) dx$

(b) $\int x^2 e^{3x} dx$

(c) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

(d) $\int e^{2x} \sin(3x) dx$

(e) $\int x \arctan(x) dx$

Gabarito - Exercício 3

(a) **Resolução:** Seja $u = x$, $dv = \cos(2x)dx$, então $du = dx$, $v = \frac{1}{2} \sin(2x)$:

$$\begin{aligned}\int x \cos(2x) dx &= x \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) - \int \frac{1}{2} \sin(2x) dx \\&= \frac{x}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) + C \\&= \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C\end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Primeira aplicação: $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, então $du = 2x dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= x^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 2x dx \\&= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx\end{aligned}$$

Segunda aplicação para $\int x e^{3x} dx$: $u = x$, $dv = e^{3x}dx$, então $du = dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$:

$$\begin{aligned}\int x e^{3x} dx &= x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \\&= \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C\end{aligned}$$

Juntando:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + C \\&= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2x}{9} e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C \\&= \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C\end{aligned}$$

(c) **Resolução:** Seja $u = \ln(x^2 + 1)$, $dv = dx$, então $du = \frac{2x}{x^2+1}dx$, $v = x$:

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 + 1) dx &= x \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\&= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx\end{aligned}$$

Para $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \arctan(x) + C$$

Juntando:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+1) dx &= x \ln(x^2+1) - 2(x - \arctan(x)) + C \\ &= x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan(x) + C \end{aligned}$$

(d) **Resolução:** Seja $I = \int e^{2x} \sin(3x) dx$. Primeira aplicação: $u = \sin(3x)$, $dv = e^{2x} dx$, então $du = 3 \cos(3x) dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 3 \cos(3x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos(3x) dx \end{aligned}$$

Segunda aplicação para $\int e^{2x} \cos(3x) dx$: $u = \cos(3x)$, $dv = e^{2x} dx$, então $du = -3 \sin(3x) dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot (-3 \sin(3x)) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin(3x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{2} I \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{2} I \right) \\ I &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{4} e^{2x} \cos(3x) - \frac{9}{4} I \\ I + \frac{9}{4} I &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{4} e^{2x} \cos(3x) \\ \frac{13}{4} I &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{4} e^{2x} \cos(3x) \\ I &= \frac{4}{13} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{4} e^{2x} \cos(3x) \right) + C \\ &= \frac{2}{13} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{13} e^{2x} \cos(3x) + C \end{aligned}$$

(e) **Resolução:** Seja $u = \arctan(x)$, $dv = x \, dx$, então $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\begin{aligned} \int x \arctan(x) \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \end{aligned}$$

Para $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = x - \arctan(x) + C$$

Juntando:

$$\begin{aligned} \int x \arctan(x) \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + C \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C \\ &= \frac{1}{2}[(x^2 + 1) \arctan(x) - x] + C \end{aligned}$$

Exercício 4 - Substituição Trigonométrica

Calcule usando substituição trigonométrica:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

(b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$

(c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} \, dx$

(d) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

(e) $\int \sqrt{x^2+9} \, dx$

Gabarito - Exercício 4

(a) **Resolução:** Seja $x = 3 \sin \theta$, então $dx = 3 \cos \theta d\theta$, $\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} &= \int \frac{3 \cos \theta}{3 \cos \theta} d\theta = \int d\theta = \theta + C \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Seja $x = 2 \sec \theta$, então $dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$, $\sqrt{x^2 - 4} = 2 \tan \theta$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} &= \int \frac{2 \sec \theta \tan \theta}{4 \sec^2 \theta \cdot 2 \tan \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1}{4 \sec \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \sin \theta + C \end{aligned}$$

Como $x = 2 \sec \theta$, então $\sec \theta = \frac{x}{2}$, $\cos \theta = \frac{2}{x}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$:

$$\frac{1}{4} \sin \theta + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{4x} + C$$

(c) **Resolução:** Seja $x = 4 \sin \theta$, então $dx = 4 \cos \theta d\theta$, $\sqrt{16 - x^2} = 4 \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx &= \int \frac{16 \sin^2 \theta}{4 \cos \theta} \cdot 4 \cos \theta d\theta \\ &= 16 \int \sin^2 \theta d\theta = 16 \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= 8 \int (1 - \cos(2\theta)) d\theta = 8 \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) + C \\ &= 8\theta - 4 \sin(2\theta) + C = 8\theta - 8 \sin \theta \cos \theta + C \end{aligned}$$

Como $x = 4 \sin \theta$, então $\sin \theta = \frac{x}{4}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$, $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)$:

$$\begin{aligned} 8\theta - 8 \sin \theta \cos \theta + C &= 8 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - 8 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + C \\ &= 8 \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

(d) **Resolução:** Seja $x = \tan \theta$, então $dx = \sec^2 \theta d\theta$, $\sqrt{x^2 + 1} = \sec \theta$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta = \int \cos \theta d\theta \\ &= \sin \theta + C\end{aligned}$$

Como $x = \tan \theta$, então $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$:

$$\sin \theta + C = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$$

(e) **Resolução:** Seja $x = 3 \tan \theta$, então $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$, $\sqrt{x^2 + 9} = 3 \sec \theta$:

$$\int \sqrt{x^2 + 9} dx = \int 3 \sec \theta \cdot 3 \sec^2 \theta d\theta = 9 \int \sec^3 \theta d\theta$$

Usando a fórmula $\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$:

$$9 \int \sec^3 \theta d\theta = \frac{9}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{9}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

Como $x = 3 \tan \theta$, então $\tan \theta = \frac{x}{3}$, $\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$:

$$\begin{aligned}&= \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{9}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \frac{9}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{3} \right| + C \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 9}| - \frac{9}{2} \ln 3 + C \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 9}| + C'\end{aligned}$$

Exercício 5 - Frações Parciais

Calcule usando frações parciais:

(a) $\int \frac{2x+3}{x^2-4} dx$

$$(b) \int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} dx$$

$$(c) \int \frac{3x^2-2x+4}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

$$(d) \int \frac{x^3+2x}{x^2-3x+2} dx$$

$$(e) \int \frac{4x^2-x+5}{(x+1)(x^2+4)} dx$$

Gabarito - Exercício 5

(a) **Resolução:** Fatorando: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x^2-4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \\ 2x+3 &= A(x+2) + B(x-2) \end{aligned}$$

$$\text{Para } x = 2: 7 = 4A \Rightarrow A = \frac{7}{4}$$

$$\text{Para } x = -2: -1 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2-4} dx &= \int \left(\frac{7/4}{x-2} + \frac{1/4}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{7}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Fatorando: $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ x^2+2x-1 &= A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Para } x = 0: -1 = -A \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Para } x = 1: 2 = 2B \Rightarrow B = 1$$

$$\text{Para } x = -1: -2 = 2C \Rightarrow C = -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \ln|x| + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x(x-1)}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

(c) **Resolução:**

$$\frac{3x^2 - 2x + 4}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$3x^2 - 2x + 4 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Para $x = 1$: $5 = 2A \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

Coefficiente de x^2 : $3 = A + B \Rightarrow B = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Coefficiente de x^0 : $4 = A - C \Rightarrow C = A - 4 = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2}$

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 4}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{5/2}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{x^2+1} \right) dx$$
$$= \frac{5}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$
$$= \frac{5}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{3}{2} \arctan(x) + C$$

(d) **Resolução:** Primeiro dividimos: $x^3 + 2x$ dividido por $x^2 - 3x + 2$ dá $x + 3$ com resto $7x - 6$

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

Fatorando: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$\frac{7x - 6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$7x - 6 = A(x-2) + B(x-1)$$

Para $x = 1$: $1 = -A \Rightarrow A = -1$

Para $x = 2$: $8 = B \Rightarrow B = 8$

$$\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2} \right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| + 8 \ln|x-2| + C$$

(e) **Resolução:**

$$\frac{4x^2 - x + 5}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$
$$4x^2 - x + 5 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$$

Para $x = -1$: $10 = 5A \Rightarrow A = 2$
 Coeficiente de x^2 : $4 = A + B \Rightarrow B = 2$
 Coeficiente de x^0 : $5 = 4A + C \Rightarrow C = 5 - 8 = -3$

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 - x + 5}{(x+1)(x^2+4)} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+4} \right) dx \\ &= 2 \ln|x+1| + \int \frac{2x}{x^2+4} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= 2 \ln|x+1| + \ln(x^2+4) - \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Exercício 6 - Área

Calcule as áreas:

- (a) Área sob a curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ entre $x = 0$ e $x = 2$
- (b) Área entre $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$
- (c) Área entre $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ no primeiro quadrante
- (d) Área entre $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$
- (e) Área entre $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = 1$

Gabarito - Exercício 6

(a) **Resolução:**

$$\begin{aligned}A &= \int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3} + \frac{4}{2} \right) - 0 = 4 - \frac{16}{3} + 2 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Encontrando pontos de interseção:

$$\begin{aligned}x^2 &= 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x-1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0, 1\end{aligned}$$

Entre $x = 0$ e $x = 1$, $2x - x^2 \geq x^2$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [(2x - x^2) - x^2] dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c) **Resolução:** Encontrando pontos de interseção:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = x^2 &\Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0, 1 \end{aligned}$$

Entre $x = 0$ e $x = 1$, $\sqrt{x} \geq x^2$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(d) **Resolução:** Encontrando ponto de interseção:

$$\sin(x) = \cos(x) \Rightarrow \tan(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

De 0 a $\frac{\pi}{4}$: $\cos(x) \geq \sin(x)$

De $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$: $\sin(x) \geq \cos(x)$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x)) dx \\ &= [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x) - \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) + \left[(0 - 1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\ &= \sqrt{2} - 1 + [-1 + \sqrt{2}] = 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

(e) **Resolução:** Entre $x = 0$ e $x = 1$, $e^x \geq e^{-x}$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 \\ &= (e + e^{-1}) - (1 + 1) = e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

Exercício 7 - Trabalho

Calcule o trabalho realizado:

- (a) Uma força $F(x) = 3x^2 + 2x$ (em Newtons) atua sobre uma partícula que se move ao longo do eixo x de $x = 0$ a $x = 4$ m. Calcule o trabalho.
- (b) Para esticar uma mola de seu comprimento natural de 10 cm para 15 cm, são necessários 30 J. Qual o trabalho necessário para esticá-la de 15 cm para 20 cm?
- (c) Um tanque cilíndrico de raio 2 m e altura 5 m está cheio de água. Calcule o trabalho para bombear toda a água para cima do tanque (densidade da água: 1000 kg/m^3 , $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).
- (d) Uma corda de 50 m pesa 0.5 kg/m está pendurada em um edifício. Calcule o trabalho para puxar toda a corda para o topo.
- (e) Um tanque cônico com vértice para baixo tem raio de 3 m e altura 6 m, cheio de água. Calcule o trabalho para bombear a água até o topo do tanque.

Gabarito - Exercício 7

(a) **Resolução:**

$$\begin{aligned} W &= \int_0^4 F(x) dx = \int_0^4 (3x^2 + 2x) dx \\ &= [x^3 + x^2]_0^4 = 64 + 16 = 80 \text{ J} \end{aligned}$$

(b) **Resolução:** Lei de Hooke: $F = kx$

Trabalho: $W = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$

De 0 a 5 cm (0.05 m): $30 = \frac{1}{2}k(0.05)^2 \Rightarrow k = \frac{60}{0.0025} = 24000 \text{ N/m}$

De 5 cm a 10 cm (0.05 m a 0.10 m):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}k(0.10)^2 - \frac{1}{2}k(0.05)^2 = \frac{1}{2} \cdot 24000(0.01 - 0.0025) \\ &= 12000 \cdot 0.0075 = 90 \text{ J} \end{aligned}$$

(c) **Resolução:** Volume de cada camada: $dV = \pi(2)^2 dy = 4\pi dy \text{ m}^3$

Massa: $dm = 1000 \cdot 4\pi dy = 4000\pi dy \text{ kg}$

Força: $dF = 9.8 \cdot 4000\pi dy = 39200\pi dy \text{ N}$

Distância a levantar: $5 - y \text{ m}$

Trabalho:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 39200\pi(5 - y) dy = 39200\pi \left[5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^5 \\ &= 39200\pi \left(25 - \frac{25}{2} \right) = 39200\pi \cdot \frac{25}{2} \\ &= 490000\pi \approx 1539380.4 \text{ J} \end{aligned}$$

(d) **Resolução:** Comprimento pendurado: $x \text{ m}$ (do fundo)

Peso do segmento: $0.5 \cdot 9.8 dx = 4.9 dx \text{ N}$

Distância a levantar: $x \text{ m}$

Trabalho:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{50} 4.9x dx = 4.9 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{50} \\ &= 4.9 \cdot \frac{2500}{2} = 4.9 \cdot 1250 = 6125 \text{ J} \end{aligned}$$

(e) **Resolução:** Por semelhança de triângulos: $\frac{r}{y} = \frac{3}{6} \Rightarrow r = \frac{y}{2}$

Volume: $dV = \pi r^2 dy = \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy = \frac{\pi y^2}{4} dy$

Massa: $dm = 1000 \cdot \frac{\pi y^2}{4} dy = 250\pi y^2 dy \text{ kg}$

Força: $dF = 9.8 \cdot 250\pi y^2 dy = 2450\pi y^2 dy \text{ N}$

Distância: $6 - y \text{ m}$

Trabalho:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^6 2450\pi y^2(6 - y) dy = 2450\pi \int_0^6 (6y^2 - y^3) dy \\ &= 2450\pi \left[2y^3 - \frac{y^4}{4} \right]_0^6 \\ &= 2450\pi \left(2 \cdot 216 - \frac{1296}{4} \right) \\ &= 2450\pi(432 - 324) = 2450\pi \cdot 108 \\ &= 264600\pi \approx 831265.5 \text{ J} \end{aligned}$$

Exercício 8 - Integrais Impróprias

Calcule as integrais impróprias:

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(b) $\int_0^\infty e^{-3x} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

(d) $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

Gabarito - Exercício 8

(a) **Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

(b) **Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-3x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} e^{-3b} + \frac{1}{3} \right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(c) **Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx &= \int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-2x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{b}} + 2 \right) \\ &= 0 + 2 = 2\end{aligned}$$

(d) **Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{2x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2a} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(e) **Resolução:**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[-2(1-b)^{\frac{1}{2}} + 2(1-0)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= 0 + 2 = 2\end{aligned}$$

Exercício 9 - Volume (rotação em torno do eixo x)

Calcule os volumes dos sólidos gerados pela rotação em torno do eixo x:

- (a) Região sob $y = \sqrt{x}$ de $x = 0$ a $x = 4$
- (b) Região entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ no primeiro quadrante
- (c) Região sob $y = \sin(x)$ de $x = 0$ a $x = \pi$
- (d) Região limitada por $y = 4 - x^2$ e o eixo x
- (e) Região sob $y = e^{-x}$ de $x = 0$ a $x = \infty$

Gabarito - Exercício 9

(a) **Resolução:**

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi\end{aligned}$$

- (b) **Resolução:** Pontos de interseção: $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

Volume do sólido externo (raio $\sqrt{x}$) menos interno (raio x^2):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$

- (c) **Resolução:**

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

- (d) **Resolução:** Interseção com eixo x: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 \\ &= \pi \left[\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) - \left(-32 + \frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right) \right] \\ &= \pi \left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5} \right) = \pi \left(\frac{960 - 640 + 192}{15} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{512}{15} = \frac{512\pi}{15} \end{aligned}$$

- (e) **Resolução:**

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\infty (e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x} dx \\ &= \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^b \\ &= \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} \right) = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercício 10 - Volume (rotação em torno do eixo y)

Calcule os volumes dos sólidos gerados pela rotação em torno do eixo y:

- (a) Região sob $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 2$
- (b) Região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 0$
- (c) Região entre $y = x^3$ e $y = x$ no primeiro quadrante
- (d) Região limitada por $y = \ln(x)$, $y = 0$, $x = e$
- (e) Região sob $y = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ a $x = \infty$

Gabarito - Exercício 10

- (a) **Resolução:** Método das cascas cilíndricas: $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 2\pi \cdot \frac{16}{4} = 8\pi \end{aligned}$$

- (b) **Resolução:** $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$, de $y = 0$ a $y = 1$

$$V = \pi \int_0^1 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

- (c) **Resolução:** Pontos de interseção: $x^3 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$
Método das cascas: raio x , altura $x - x^3$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x(x - x^3) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

(d) **Resolução:** $y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y$, de $y = 0$ a $y = 1$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy = \pi \int_0^1 e^{2y} dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

(e) **Resolução:** Método das cascas: $y = \frac{1}{x}$

$$V = 2\pi \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x} dx = 2\pi \int_1^\infty 1 dx \quad (\text{diverge})$$

Usando método dos discos: $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$, de $y = 0$ a $y = 1$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{y} \right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^{-2} dy \quad (\text{diverge em } 0)$$

O volume é infinito.

Exercício 11 - Probabilidade e Esperança

Resolva os problemas de probabilidade:

- (a) Verifique se $f(x) = \frac{1}{2}x$ para $0 \leq x \leq 2$ é uma função densidade de probabilidade.
- (b) Para $f(x) = 3x^2$ em $[0, 1]$, calcule $P(0.2 \leq X \leq 0.8)$.
- (c) Para $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ em $(-\infty, \infty)$, calcule a esperança $E[X]$.
- (d) Para $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (distribuição de Cauchy), mostre que a esperança não existe.
- (e) Para $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$ (exponencial), calcule $E[X]$ e $E[X^2]$.

Gabarito - Exercício 11

- (a) **Resolução:** Para ser fdp:

(a) $f(x) \geq 0$ para todo x : SIM, $\frac{1}{2}x \geq 0$ em $[0, 2]$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$:

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1$$

SIM, é fdp.

(b) **Resolução:**

$$\begin{aligned} P(0.2 \leq X \leq 0.8) &= \int_{0.2}^{0.8} 3x^2 dx = [x^3]_{0.2}^{0.8} \\ &= 0.8^3 - 0.2^3 = 0.512 - 0.008 = 0.504 \end{aligned}$$

(c) **Resolução:** $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^x & x < 0 \end{cases}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot \frac{1}{2}e^x dx + \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-x} dx$$

A primeira integral: seja $u = x$, $dv = \frac{1}{2}e^x dx$

$$\int x \cdot \frac{1}{2}e^x dx = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2} \int e^x dx = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x + C$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x \cdot \frac{1}{2}e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x \right]_a^0 \\ &= \left(0 - \frac{1}{2} \right) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}ae^a - \frac{1}{2}e^a \right) \\ &= -\frac{1}{2} - (0 - 0) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Segunda integral: seja $u = x$, $dv = \frac{1}{2}e^{-x} dx$

$$\int x \cdot \frac{1}{2}e^{-x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + C$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x \cdot \frac{1}{2}e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} \right]_0^b \\ &= (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$E[X] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

(d) **Resolução:** Para a esperança existir, $\int_{-\infty}^\infty |x|f(x) dx$ deve convergir:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |x|f(x) dx &= \int_{-\infty}^\infty |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(1+b^2) = \infty\end{aligned}$$

Portanto, a esperança não existe.

(e) **Resolução:**

$$E[X] = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Integração por partes: $u = x$, $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, então $du = dx$, $v = -e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned}E[X] &= [-xe^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Integração por partes: $u = x^2$, $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, então $du = 2x dx$,
 $v = -e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 + 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$