

Convergência de Sequências de Funções

Convergência Pontual, convergencia Uniforme e Propriedades

Cristian. F. Coletti

Universidade Federal do ABC

Terceiro Quadrimestre de 2025

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Convergência Pontual
- 3 Convergência Uniforme
- 4 Teoremas de Convergência

Motivação

- Sequências de funções aparecem em muitos contextos:
 - Séries de Fourier
 - Séries de Potências
 - Aproximações numéricas
 - Análise funcional
- Diferentes tipos de convergência preservam diferentes propriedades
- É crucial entender quando limites preservam continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade

Definição de Convergência Pontual

Definição 1: Convergência Pontual

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f_n converge pontualmente para f em A se:

Para cada $x \in A$ fixado, a sequência numérica $\{f_n(x)\}$ converge para $f(x)$.

Em símbolos:

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- N depende de ε e de x
- A convergência pode ser mais rápida em alguns pontos que em outros

Exemplo de Convergência Pontual

Example

Considere $f_n(x) = x^n$ em $[0, 1]$. A sequência converge pontualmente para:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

- Para $x \in [0, 1)$: $x^n \rightarrow 0$
- Para $x = 1$: $1^n = 1 \rightarrow 1$
- O limite é descontínuo, embora cada f_n seja contínua!

Definição de Convergência Uniforme

Definição 2: Convergência Uniforme

Uma sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em A se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

- N depende APENAS de ε , não de x
- A convergência é "uniforme" em todo o domínio
- A "faixa" $\{(x, y) : f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}$ contém todos os gráficos de f_n para n suficientemente grande

Interpretação Geométrica

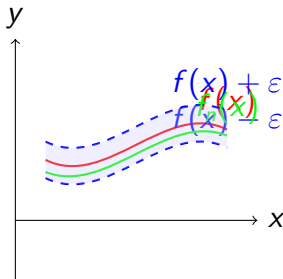


Figura: Convergência uniforme: f_n fica inteiramente dentro da faixa ε em torno de f

Exemplo de Convergência Uniforme

Example

Considere $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ em $\mathbb{R}$.

- Convergência pontual: $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, logo $f_n \rightarrow 0$ pontualmente
- Convergência uniforme: $|f_n(x) - 0| = \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$
- Dado $\varepsilon > 0$, escolha $N > \frac{1}{\varepsilon}$
- Então $n \geq N \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ para TODO x
- Logo, a convergência é UNIFORME

Contraexemplo: Convergência Pontual mas Não Uniforme

Example

Volte ao exemplo $f_n(x) = x^n$ em $[0, 1]$.

- Já vimos que converge pontualmente para $f(x)$ descontínua
- Suponha que a convergência fosse uniforme
- Como cada f_n é contínua, o limite seria contínuo (veremos este teorema depois)
- Mas f é descontínua! Contradição.
- Logo, a convergência NÃO é uniforme em $[0, 1]$

Observação: Em $[0, a]$ com $0 < a < 1$, a convergência É uniforme!

Critério de Cauchy para Convergência Uniforme

Teorema 1: Critério de Cauchy Uniforme

Uma sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente em A se, e somente se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$m, n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$$

Demonstração.

- ($\Rightarrow$) Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente, então para $m, n \geq N$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- ($\Leftarrow$) Pelo critério de Cauchy pontual, existe limite pontual $f(x)$
- Fixe x e faça $m \rightarrow \infty$ na desigualdade: $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ para $n \geq N$
- Como N não depende de x , a convergência é uniforme



Convergência Uniforme e Continuidade

Teorema 2: Preservação da Continuidade

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas em A que converge uniformemente para f em A . Então f é contínua em A .

Demonstração.

- Seja $x_0 \in A$ e $\varepsilon > 0$
- Por convergência uniforme: $\exists N$ tal que $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in A$
- Por continuidade de f_N em x_0 : $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
- Então para $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

- Logo, f é contínua em x_0



Convergência Uniforme e Integrabilidade

Teorema 3: Troca de Limite com Integral

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções Riemann-integráveis em $[a, b]$ que converge uniformemente para f em $[a, b]$. Então:

① f é Riemann-integrável em $[a, b]$

②
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Prova do Item 2.

- Por convergência uniforme: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo x
- Então para $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$



Contraexemplo para Integração

Example

Considere $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Cada f_n é contínua (logo integrável)
- $f_n \rightarrow 0$ pontualmente
- Mas $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ para todo n (área do triângulo)
- Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$
- A convergência NÃO é uniforme!

Convergência Uniforme e Diferenciabilidade

Teorema 4: Troca de Limite com Derivada

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções diferenciáveis em $[a, b]$ tal que:

- 1 Existe $x_0 \in [a, b]$ onde $\{f_n(x_0)\}$ converge
- 2 $\{f'_n\}$ converge uniformemente para alguma função g em $[a, b]$

Então:

- 1 $\{f_n\}$ converge uniformemente para uma função f em $[a, b]$
- 2 f é diferenciável em $[a, b]$ e $f' = g$

Prova do Teorema da Derivada

Demonstração.

- Pelo TVM: para $x, y \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(y) - f_m(y)]| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| |x - y|$$

- Por Cauchy uniforme para $\{f'_n\}$: dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $m, n \geq N \Rightarrow |f'_n(z) - f'_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ para todo z
- Então: $|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
- Logo, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}$
- Como $\{f_n(x_0)\}$ converge, $\exists N_2$ tal que $m, n \geq N_2 \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$
- Então $m, n \geq \max\{N, N_2\} \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todo x
- Pelo critério de Cauchy uniforme, $\{f_n\}$ converge uniformemente para alguma f

Prova do Teorema da Derivada (Continuação)

Continuação.

- Seja $x \in [a, b]$ fixo, $h \neq 0$ tal que $x + h \in [a, b]$
- Defina $\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$, $\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$
- Pelo TVM: $\phi_n(t) = f'_n(\xi)$ para algum ξ entre x e t
- Então $|\phi_n(t) - \phi_m(t)| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|$
- Pela convergência uniforme de $\{f'_n\}$, $\{\phi_n\}$ converge uniformemente
- Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ uniformemente
- Em particular, $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \phi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x)$
- Mas $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(t) = f'(x)$, portanto $f'(x) = g(x)$



Contraexemplo para Derivação

Example

Considere $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ em $\mathbb{R}$.

- $f_n \rightarrow 0$ uniformemente (pois $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$)
- $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$
- $\{f'_n(x)\}$ NÃO converge (exceto trivialmente)
- Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$
- Mas $f'(0) = 0$
- Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) \neq f'(0)$

Observação: As hipóteses do Teorema 4 não são satisfeitas pois $\{f'_n\}$ não converge uniformemente.