

Sequências limitadas e sequências monótonas

Cristian Coletti

CMCC - UFABC

Definição 2.10

Para algumas sequências o conjunto imagem $\text{Im}(a_n) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado superiormente ou inferiormente, classificaremos as sequências em relação as propriedades de limitação da sua imagem como:

- Uma sequência (a_n) é dita limitada superiormente se o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente como subconjunto dos números reais, i.e, se existir M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.10 (continuação)

- Uma sequência (a_n) é dita limitada inferiormente se o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado inferiormente como subconjunto dos números reais, i.e, se existir M tal que $a_n \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Uma sequência (a_n) é dita limitada se o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente e inferiormente. Ou de modo equivalente se existir M tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Uma sequência que não é limitada é dita ilimitada.

Exemplo 2.11

A sequência $(a_n) = \frac{1}{n+1}$ é limitada pois $\left| \frac{1}{n+1} \right| < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar que

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < 2$$

resolvendo essa desigualdade

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2n + 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < n$$

O conjunto solução da desigualdade anterior é $\mathbb{N}$, ou seja, mostramos que para todo n :

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < 2$$

e deste modo a sequência é limitada.

Exemplos 2.12

- 1 Do mesmo modo que o exemplo anterior pode-se mostrar que a sequência $a_n = -\frac{1}{n^2}$ é limitada superiormente pelo 0, e limitada inferiormente por -1, sendo assim limitada.
- 2 A sequência $(b_n) = n$ como veremos abaixo não é limitada superiormente, mas é limitada inferiormente. Uma cota inferior nesse caso é 0.

Teorema 2.13

Sejam $(a_n), (b_n)$ duas sequências satisfazendo $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$.
Então:

- se a sequência a_n é limitada inferiormente, a sequência b_n também é limitada inferiormente.
- se a sequência b_n é limitada superiormente, a sequência a_n também é limitada superiormente.

Exemplos 2.14

- ① A sequência $a_n = \frac{1}{2^n}$ é limitada superiormente pois $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência também é limitada inferiormente pois $\frac{1}{2^n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ② A sequência $b_n = \frac{1}{n^2}$ é limitada superiormente pois $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ③ A sequência $c_n = \frac{(-1)^n}{n^5}$ é uma sequência limitada pois $-\frac{1}{n} < \frac{(-1)^n}{n^5} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.15

Se a sequência (a_n) converge então (a_n) é limitada.

Demonstração. Como a_n converge, digamos ao ponto a , existe M tal que se $n > M$ então:

$$|a_n - a| < 1,$$

(veja que na definição de limite escolhemos $\epsilon = 1$) o que implica que

$$|a_n| < |a| + 1$$

Demonstração (continuação)

Veja que mostramos que a partir do ponto M a sequência é limitada por $|a| + 1$. Sobrou apenas um número finito de termos $\{a_1, \dots, a_M\}$ que não são necessariamente limitados por $|a| + 1$. Mas como esse conjunto é finito ele é limitado por $C = \max\{|a_1|, \dots, |a_M|\}$.

Agora se tomarmos $D = \max\{|a| + 1, C\}$ teremos que todos os termos da sequência satisfazem $|a_n| < D$. Vejamos porque:

Se $n < M$ então

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_M|\} \leq D$$

Se $n > M$ então

$$|a_n| < |a| + 1 \leq D.$$

Exemplos 2.16

Como consequência da proposição anterior temos que as seguintes sequências não convergem, pois não são limitadas.

- ❶ A sequência $(n!)_{n=1}^{\infty}$ diverge. Ela não é limitada superiormente pois para todo n , $n! > n$.
- ❷ A sequência $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge. Essa sequência não é limitada superiormente pois para todo n , $2^n > n$.
- ❸ A sequência $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ diverge. Essa sequência não é limitada pois

$$\frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2}.$$

Sequências crescentes e decrescentes

De modo análogo às funções reais, as sequências podem ser classificadas em relação ao seu crescimento e/ou decrescimento, ou seja, o estudo do (de)crescimento dos termos da sequência em relação a sua posição na sequência. Assim, dada uma sequência (a_n) dizemos que:

- (a_n) é crescente se, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n < a_m$.
- (a_n) é não-decrescente para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n \leq a_m$.
- (a_n) é decrescente para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n > a_m$.

Definições (continuação)

- (a_n) é não-crescente para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n \geq a_m$.

Em qualquer um dos casos acima, dizemos que a função é monótona.

Em particular, quando a função é crescente ou decrescente, dizemos que é estritamente monótona.

Definição 2.17

As definições anteriores admitem as seguintes simplificações úteis:

- (a_n) é crescente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n < a_{n+1}$.
- (a_n) é não-decrescente se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n \leq a_{n+1}$.
- (a_n) é decrescente se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n > a_{n+1}$.
- (a_n) é não-crescente se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n \geq a_{n+1}$.

Exemplo 2.18

A sequência $(a_n) = \frac{1}{n+1}$ é decrescente pois para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Vamos provar que a sequência é decrescente resolvendo a desigualdade na variável n que segue:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Essa desigualdade é equivalente à $n+1 > n$, que é equivalente à $1 > 0$. O conjunto solução da última desigualdade é $\mathbb{N}$, ou seja para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

e assim a sequência é decrescente.

Exemplo 2.19

A sequência $\frac{n}{n^2+1}$ é não-crescente.

Demonstraremos esse fato resolvendo a desigualdade:

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}.$$

A desigualdade anterior claramente é equivalente à :

$$\begin{aligned}(n+1)(n^2+1) &< n((n+1)^2+1) \\ \Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 &< n^3 + 2n^2 + 2n \\ \Leftrightarrow 1 &< n^2 + n\end{aligned}$$

Exemplo 2.19 (continuação)

Agora claramente se $n \geq 1$ então $n^2 + n > 1$, ou seja, o conjunto solução é os naturais e a sequência é decrescente. (Se o leitor julgar necessário, ele pode provar que $n^2 + n > 1$, para todo $n \geq 1$ através de uma indução sobre n .)

Teorema 2.20 (Convergência Monótona)

Toda sequência monótona e limitada converge.

Demonstração do Teorema 2.20

Vamos primeiro provar o resultado supondo (a_n) crescente e limitada. Como o conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, pela propriedade de completude dos reais, esse conjunto possui supremo, que denotaremos por L . Provaremos que L é o limite da sequência (a_n) . Como L é supremo, claramente $a_n \leq L$ para todo n . Agora seja $\epsilon > 0$, então $L - \epsilon$ não pode ser cota superior de A , pois isso implicaria que L não é supremo. E assim existe um termo a_N tal que $a_N > L - \epsilon$. Como a sequência é crescente isso implica que para todo $n > N$

$$a_n > L - \epsilon$$

E assim

$$L - \epsilon < a_n \leq L \Leftrightarrow -\epsilon < a_n - L \leq 0 < \epsilon$$

E logo a sequência converge a L .

Demonstração (continuação)

Se a sequência (a_n) é decrescente, a demonstração é análoga tomando L o ínfimo de A e será deixada como exercício.

2.21 Proposição A sequência $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente.

Demonstração. Vamos demonstrar que essa sequência é estritamente crescente, mostrando que o quociente de dois termos consecutivos é maior que 1. Dividindo dois termos consecutivos da sequência temos:

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \\ &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Demonstração (continuação)

Para mostrar que $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ é maior que 1, vamos usar a seguinte desigualdade: $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo x . Usando essa estimativa temos que:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2}.$$

E assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^3} > 1 \end{aligned}$$

Logo a sequência é crescente. $\square$

2.22 Proposição

A sequência $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente.

Demonstração. Primeiro, usando a expansão binomial temos:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \\ &\quad + \frac{n!}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n \cdot n} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot n \cdot n} + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{n \cdot n \cdots n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

Demonstração (continuação)

Utilizando que $0 < (1 - \frac{m}{n}) < 1$ sempre que $m < n$, podemos majorar a soma anterior, obtendo:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Agora, como $k! \geq 2^{k-1}$ para $k \geq 2$, temos:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Finalmente, como a expressão em parênteses é a soma de progressão geométrica de termo inicial 1 e razão $\frac{1}{2}$, temos que

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$$

para todo n e assim:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1 + 2 = 3$$

Demonstração (conclusão)

Por outro lado, como essa sequência é crescente todos os seus termos são maiores que o primeiro termo $e_1 = 2$, ou seja:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

e logo a sequência é limitada. $\square$

Como já mostramos, a sequência $(1 + \frac{1}{n})^n$ é monótona crescente e limitada. Logo pelo teorema 2.20 ela converge. O limite dessa sequência é chamado número de Euler ou simplesmente “ e ” e é denotado por e . Pelas estimativas que obtivemos no exemplo 2.22, sabemos que esse número está entre 2 e 3. Com um pouco mais de esforço pode-se provar que os primeiros dígitos do número e são 2,71828183, ou seja $e \approx 2,71828183$, e que e é irracional.

Limites Infinitos

2.6 Limites Infinitos

Algumas sequências, apesar de não convergirem, possuem um comportamento inteligível conforme o valor de n cresce: a sequência torna-se maior que qualquer número real C para valores suficientemente grandes de n . Para essas sequências diremos que o limite é infinito e usaremos a notação

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Se uma sequência se torna menor que qualquer número real C , para valores suficientemente grandes de n , diremos que o limite da sequência é menos infinito e denotaremos tal fato por:

$$b_n \rightarrow -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

Limites Infinitos

Dada uma sequência $(a_n) : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que o limite da sequência (a_n) é mais infinito, fato que denotaremos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

se para todo $C \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n > M$ então $a_n > C$.

Dada uma sequência $(a_n) : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que o limite da sequência (a_n) é menos infinito, fato que denotaremos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

se para todo $C \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n > M$ então $a_n < C$.

Observações Importantes

É importante observar que ∞ é somente uma notação para o fato da sequência se tornar maior que qualquer número natural para termos suficientemente grandes. Dessa forma não podemos realizar operações algébricas com o símbolo de infinito. Em outras palavras as expressões $\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ não fazem sentido.

2.23 Exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

Queremos provar que dado $C > 0$ existe M tal que se $n > M$ então:

$$n > C$$

Como a sequência n não é limitada superiormente, pelo menos um de seus termos, digamos a_M é maior que C . Agora se $n > M$ então $n > M > C$, como queríamos.

Pode-se mostrar de modo análogo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

2.24 Teorema (de Comparação de Sequências)

Sejam a_n e b_n duas sequências reais satisfazendo $a_n \leq b_n$ para todo n .

1. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

2. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

2.25 Exemplos

Como corolário do teorema anterior, temos os seguintes limites, que são facilmente obtidos através de comparação com uma das sequências $a_n = n$ e $b_n = -n$.

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^n = \infty$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

4. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty.$$

2.25 Exemplos (continuação)

5. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ ímpar então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^k = -\infty$$

6. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ par então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^k = \infty$$

7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$$

2.26 Proposição

Se a_n é uma sequência não-decrescente e não limitada superiormente, então $a_n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $C \in \mathbb{R}$, como a_n não é limitada superiormente existe a_N tal que $a_N > C$. Como a sequência a_n é não-decrescente, se $n > N$ então $a_n \geq a_N > C$ e assim $a_n \rightarrow \infty$. $\square$

De modo análogo, pode-se provar que se a_n é não-crescente e não limitada inferiormente então seu limite é $-\infty$.

2.27 Exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

A sequência $\ln(n)$ é monótona crescente, logo temos duas possibilidades ou ela é limitada superiormente e nesse caso converge ou ela é ilimitada superiormente e neste caso seu limite é ∞ .

Suponha que $\ln n$ fosse limitada superiormente, ou seja existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\ln n < C$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Neste caso teríamos que $n = e^{\ln n} < e^C$, e a sequência n seria limitada superiormente. Absurdo. E assim temos que a sequência $\ln n$ é ilimitada e seu limite é ∞ .

2.28 Proposição

Seja (a_n) uma sequência real.

1. Se $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.
2. Se $a_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \rightarrow -\infty$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

Demonstração. Demonstraremos apenas a primeira afirmação.

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, nosso objetivo é encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| = \frac{1}{a_n} < \epsilon$$

para todo $n \geq N$. Como $a_n \rightarrow \infty$, pelo uso da definição de sequências divergindo para o infinito, para $\frac{1}{\epsilon} > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \frac{1}{\epsilon}$ para todo $n \geq N$. Em outras palavras, para todo $n \geq N$, temos $\frac{1}{a_n} < \epsilon$.

Assim, encontramos tal N .

($\Leftarrow$) Como a_n é positivo, $\frac{1}{a_n}$ também é positivo para todo n . Dado $K > 0$ queremos mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > K$ para todo $n \geq N$.

Como $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ e $a_n > 0$, utilizando $\epsilon = \frac{1}{K} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K}$ para todo $n \geq N$. Em outras palavras, para todo $n \geq N$, temos $a_n > K$. Assim, encontramos o N desejado. $\square$

2.29 Exemplo

Queremos encontrar o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$.

Observe que, como $n \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ devemos ter $n^{1/n} \geq 1$, caso contrário, $n^{1/n} < 1^n = 1$, o que é absurdo! Assim, podemos escrever $n^{1/n} = 1 + a_n$ para alguma sequência de números não negativos (a_n) . Isso implica que $n = (1 + a_n)^n$ e, pelo desenvolvimento binomial para $n \geq 2$, temos:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

e logo

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Usando a Proposição 2.28 e o Teorema do Confronto, ao tomar o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos $a_n \rightarrow 0$. Portanto, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ dos dois lados de $n^{1/n} = 1 + a_n$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$.

Propriedades do limite de seqüências

Vamos nessa seção apresentar algumas propriedades dos limites que serão muito úteis nos cálculos dos mesmos.

2.30 Teorema (Propriedades Algébricas do Limite) Seja c um número real e (a_n) e (b_n) duas seqüências convergentes, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Então:

L1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = cA$.

L2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$. (Limite da soma)

L3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = AB$. (Limite do produto)

L4. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}$. (Limite do quociente)

L5. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$. (Limite do módulo)

L6. Se k é ímpar, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. (Limite da raiz)

L7. Se k é par e $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. (Limite da raiz)

Demonstração (L1)

Demonstração. (i) Começaremos considerando o caso $c \neq 0$. Nosso objetivo é mostrar que a sequência (ca_n) converge a cA , ou seja nós queremos achar um ponto M a partir do qual

$$|ca_n - cA| < \epsilon.$$

Observamos inicialmente que vale a igualdade:

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| \tag{2.4}$$

Como por hipótese sabemos que $a_n \rightarrow A$, isto implica que existe um ponto M_1 a partir do qual a diferença entre a sequência a_n e A é tão pequena quanto queiramos, ou seja: se $n > M_1$ então temos que

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{|c|} \tag{2.5}$$

Demonstração (L1) - Continuação

Agora basta combinarmos as equações 2.4 e 2.5 para terminarmos a demonstração. Vejamos como:

Seja $M = M_1$, como definimos acima, então para $n > M_1$ temos que:

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon. \quad (2.6)$$

E assim provamos que $(ca_n) \rightarrow cA$.

Vamos refazer a demonstração de outro modo:

Reobservamos que vale a igualdade:

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| \quad (2.7)$$

Demonstração (L1) - Segunda abordagem

Como por hipótese sabemos que $a_n \rightarrow A$, isto implica que existe um ponto M_1 a partir do qual a diferença é tão pequena quanto queiramos, ou seja: se $n > M_1$ então temos que

$$|a_n - A| < \epsilon_1 \quad (2.8)$$

Agora basta combinarmos as equações 2.7 e 2.8 temos que Seja $M = M_1$, como definimos acima, então para $n > M_1$ temos que:

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < |c|\epsilon_1 \quad (2.9)$$

Agora como podemos escolher ϵ_1 tão pequeno quanto queiramos, escolhemos $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{|c|}$ e assim 2.9 fica:

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < |c|\epsilon_1 = |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon \quad (2.10)$$

O que prova que $(ca_n) \rightarrow cA$.

Demonstração (L2)

(ii) Para provarmos que $(a_n + b_n) \rightarrow (A + B)$, precisamos estimar

$$|(a_n + b_n) - (A + B)|$$

para valores grandes de n , e para esses valores obter que o módulo anterior é menor que ϵ .

Começamos reordenando o módulo anterior, e assim:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)|$$

Agora usaremos a desigualdade triangular para obtermos:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \quad (2.11)$$

Demonstração (L2) - Continuação

Como $a_n \rightarrow A$, por definição de convergência, temos que existe um ponto M_1 a partir do qual $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$, i.e,

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

sempre que $n > M_1$

Por outro lado como por hipótese $b_n \rightarrow B$, por definição de convergência, temos que existe um ponto M_2 a partir do qual $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$, i.e,

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

sempre que $n > M_2$

Demonstração (L2) - Conclusão

Seja $M = \max\{M_1, M_2\}$, então se $n > M$ temos:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Demonstração (L3)

(iii) Vamos provar que $(a_nb_n) \rightarrow AB$. Observamos primeiramente que valem as desigualdades

$$|a_nb_n - AB| = |a_nb_n - Ab_n + Ab_n - AB| \quad (2.16)$$

$$\leq |a_nb_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| \quad (2.17)$$

$$\leq |b_n||a_n - A| + |A||b_n - B| \quad (2.18)$$

Vamos supor que $A \neq 0$ (o caso $A = 0$ deixamos como exercício ao leitor). Como $(b_n) \rightarrow B$, existe M_1 tal que se $n > M_1$ então

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{|A|2} \quad (2.19)$$

Demonstração (L3) - Continuação

Como (b_n) é convergente, existe uma cota C tal que para todo n temos que $|b_n| < C$ e observamos que esta cota pode ser escolhida diferente de zero. E assim como $a_n \rightarrow A$ existe um ponto M_2 tal que se $n > M_2$ então:

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{C} \quad (2.20)$$

Agora podemos terminar a demonstração, para tanto seja $M = \max\{M_1, M_2\}$, então se $n > M$ temos que:

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \quad (2.21)$$

$$\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| \quad (2.22)$$

$$\leq |b_n| |a_n - A| + |A| |b_n - B| \quad (2.23)$$

$$< C |a_n - A| + |A| |b_n - B| \quad (2.24)$$

$$< C \left(\frac{\epsilon}{C} \right) + |A| \left(\frac{\epsilon}{|A|^2} \right) = \epsilon \quad (2.25)$$

(iv) Como

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

pelo item 3 basta provarmos que se $b_n \rightarrow B$ então $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$, sempre que $B \neq 0$. Começamos observando que:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{|B||b_n|} \right| \quad (2.26)$$

Como $b_n \rightarrow B$ sabemos que existe um ponto M_1 tal que se $n > M_1$ então

$$|b_n - B| < \frac{|B|}{2} \quad (2.27)$$

o que implica que $|b_n| > |B|/2$ (porque?).

Existe um outro ponto M_2 tal que se $n > M_2$ então

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon |B|^2}{2} \quad (2.28)$$

Finalmente escolhemos $M = \max\{M_1, M_2\}$, para $n > M$, teremos:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{|B||b_n|} \right| < \frac{\epsilon |B|^2}{2} \cdot \frac{1}{|B||B/2|} = \epsilon \quad (2.29)$$

2.31 Exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Pela propriedade da soma (L2), se os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

existirem, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

Mas, como já demonstramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

por ser uma sequência constante e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

2.32 Exemplo

Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Vamos provar por indução. O caso $k = 1$ já foi feito. Assim vamos supor por hipótese indutiva que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0.$$

Mas usando a L3 temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0 \cdot 0 = 0$$

2.33 Exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3}$$

Observe que não podemos usar L4 pois ambas as seqüências do numerador e do denominador são divergentes.

Para calcularmos esse limite devemos usar a seguinte estratégia: começamos dividindo por n^2 o numerador e o denominador, e logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}}$$

Supondo que os limites no denominador e no numerador existam, podemos usar L4, e temos

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n^2})}$$

2.33 Exemplo - Continuação

Supondo que os limites de cada termo da soma existam, podemos usar que o limite da soma é a soma dos limites (L2) e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 1 + 0 = 1$$

e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} = \frac{2}{1} = 2$$

2.34 Exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Vamos calcular esse limite reduzindo seu cálculo ao limite conhecido

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Para tanto começamos com algumas manipulações algébricas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \quad (2.30)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \quad (2.31)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \quad (2.32)$$

2.34 Exemplo - Continuação

Para calcularmos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

observe que a sequência $b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ e a sequência $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ são tais que $e_n = b_{n+1}$ e assim elas possuem o mesmo limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 1$$

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e \cdot 1} = e^{-1}$$

Um modo extremamente eficaz de calcular limites é o Teorema do Confronto, que em termos vagos nos diz que se uma sequência está ensanduichada por duas outras que convergem ao mesmo limite, então a sequência ensanduichada também converge a esse limite.

2.35 Teorema (do confronto) Dadas (a_n) , (b_n) e (c_n) sequências reais tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > n_0$. Então se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, então existe (b_n) converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Demonstração do Teorema 2.35

Demonstração. Como a_n é convergente existe um ponto M_1 tal que se $n > M_1$, então:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad (2.34)$$

Por outro lado como c_n é convergente existe um ponto M_2 tal que se $n > M_2$, então:

$$|c_n - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad (2.35)$$

Agora seja $M = \max\{M_1, M_2\}$ então pela equação 2.34 $L - \varepsilon < a_n$ e como $b_n \geq a_n$ temos que $b_n > L - \varepsilon$. Já pela equação 2.35 $b_n \leq c_n < L + \varepsilon$ então $b_n < L + \varepsilon$. Assim $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$ para todo $n > M$ e assim temos que b_n converge a L . $\square$

2.36 Exemplo

Se $|r| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

Provaremos primeiramente o caso $0 < r < 1$, neste caso como $r < 1$ então $\frac{1}{r} > 1$ e desta forma $\frac{1}{r} = 1 + \alpha \Leftrightarrow r = \frac{1}{1+\alpha}$.

Pelo Exemplo 1.38 temos que $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$ e assim

$$0 < r^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{1 + n\alpha} < \frac{1}{n\alpha}$$

e logo pelo Teorema do Confronto o limite é zero.

No caso que $-1 < r < 0$, note que $-|r|^n < r^n < |r|^n$ e agora como $0 < |r| < 1$, temos que $|r|^n \rightarrow 0$ e assim novamente usando o Teorema do Confronto temos que $r^n \rightarrow 0$.

2.37 Exemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$$

Como: $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, dividindo essa desigualdade por n temos:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$, pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$$

2.38 Exemplo

Seja a_n uma sequência limitada e b_n uma sequência que converge a 0 então:

$$a_n b_n \rightarrow 0$$

Como a_n é limitada, existe C tal que

$$-C < a_n < C.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $|b_n|$ temos:

$$-C|b_n| < a_n b_n < C|b_n|.$$

Agora como $b_n \rightarrow 0$ então $|b_n| \rightarrow 0$ e assim $C|b_n| \rightarrow 0$ e $-C|b_n| \rightarrow 0$, logo pelo Teorema do Confronto $a_n b_n \rightarrow 0$.

2.39 Proposição (Preservação de Desigualdades)

Sejam (a_n) e (b_n) duas seqüências reais convergentes tais que $a_n \rightarrow L$ e $b_n \rightarrow M$. Se $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $L \leq M$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $L > M$, de modo que $L - M > 0$. Definindo $\varepsilon = \frac{L-M}{2} > 0$, como $a_n \rightarrow L$, existe um $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \frac{L-M}{2}$ para todo $n \geq N_1$. Em particular, temos $a_n > \frac{M+L}{2}$ para $n \geq N_1$.

Além disso, como $b_n \rightarrow M$, existe um $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - M| < \frac{L-M}{2}$ para todo $n \geq N_2$. Em particular, temos $b_n < \frac{L+M}{2}$ para $n \geq N_2$.

Demonstração da Proposição 2.39 (continuação)

Assim, para $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos $\frac{M+L}{2} < a_N \leq b_N < \frac{L+M}{2}$, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $L \leq M$. $\square$