

Subsequências

Cristian Favio Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

2.9 Subsequências

2.40 Definição Seja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números naturais tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. A sequência $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é chamada de subsequência de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

2.41 Exemplos

Sejam as sequências (a_n) e (b_n) definidas por $a_n = (-1)^n$ e $b_n = 2n$.

1. Se definirmos uma função crescente $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $k(n) = 2n$, então temos uma nova sequência:

$$(a_{k_n}) = (a_{2n}) = (a_2, a_4, a_6, a_8, \dots) = (1, 1, 1, 1, \dots)$$

Esta sequência (a_{k_n}) é uma subsequência de (a_n) uma vez que estamos apenas pegando os termos de número par da sequência original e ignorando os demais.

2.41 Exemplos (continuação)

2. Também podemos definir $k(n) = n^2$ para que possamos criar uma subsequência de (b_n) dada por:

$$(b_{k_n}) = (b_{n^2}) = (b_1, b_4, b_9, b_{16}, \dots) = (2, 8, 18, 32, \dots)$$

onde o n -ésimo termo nesta nova sequência é dado por $b_{k_n} = 2n^2$.

2.41 Exemplos (continuação)

3. Outro exemplo de uma subsequência é a cauda de uma sequência. A cauda de uma sequência (a_n) é uma sequência $(a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots)$ para algum N fixo em $\mathbb{N}$. Esta cauda é uma subsequência obtida pela pré-composição da sequência (a_n) com a função estritamente crescente $k(n) = N + n$. Assim, a subsequência resultante de (a_n) seria $(a_{k_n}) = (a_{N+n}) = (a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots)$.

2.42 Teorema

Se uma sequência (s_n) converge para um número real s , então toda subsequência de (s_n) também converge para s .

Demonstração. Seja (s_{n_k}) uma subsequência de (s_n) . Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que $n \geq N$ implica que $|s_n - s| < \varepsilon$.

Assim, para $k \geq N$, aplicamos o resultado do Exercício 2.35 para obter $n_k \geq k \geq N$, o que garante que $|s_{n_k} - s| < \varepsilon$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s. \quad \square$$

2.43 Exemplo

Uma aplicação do Teorema 2.42 é encontrar o valor do limite de uma sequência convergente. Suponha que $0 < x < 1$ e considere a sequência (s_n) definida por $s_n = x^{1/n}$. Como $0 < x^{1/n} < 1$ para todo n , (s_n) é limitada e crescente. Pelo Teorema da Convergência Monótona 2.20, (s_n) converge para algum número, digamos s . Temos que:

$$s_{2n} = x^{1/(2n)} = \sqrt{x^{1/n}} = \sqrt{s_n}.$$

2.43 Exemplo (continuação)

Pelo Teorema 2.42,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

e, utilizando a propriedade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{s_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n},$$

obtemos:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{s_n} = \sqrt{s}.$$

Portanto, $s^2 = s$, o que implica que $s = 0$ ou $s = 1$. Como $s_1 = x > 0$ e a sequência é crescente, temos que $s \neq 0$. Logo, $s = 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1. \quad \square$$

2.44 Exemplo

O Teorema 2.42 também pode ser útil para mostrar que uma sequência é divergente. Se a sequência $s_n = (-1)^n$ fosse convergente para algum número s , então todas as subsequências também convergiriam para s . No entanto, as subsequências (s_{2n}) e (s_{2n-1}) convergem para valores diferentes, $+1$ e -1 , respectivamente, o que mostra que (s_n) não é convergente.

2.45 Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais com $a_0 < s_n < b_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passo 1 (Construção da subsequência):

1. Definimos $L = |b_0 - a_0|$.
2. Dividimos o intervalo $[a_0, b_0]$ em duas metades. Pelo menos uma dessas metades deve conter infinitos valores s_n . Escolhemos uma dessas metades e chamamos-a de $[a_1, b_1]$. Observe que $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b_0 - a_0| = \frac{L}{2}$, e que $a_1 \in \left\{ a_0, a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2} \right\}$, portanto $a_1 \geq a_0$. Existem infinitos s_n em $[a_1, b_1]$. Escolhemos um desses valores, digamos, s_{i_1} .

Demonstração (continuação)

3. Agora, dividimos o intervalo $[a_1, b_1]$ em duas metades. Novamente pelo menos uma das metades deve conter infinitos s_n . Escolhemos uma dessas metades e chamamos-a de $[a_2, b_2]$. Note que $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}|b_1 - a_1| = \frac{L}{4}$, e que $a_2 \in \{a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}\}$, de modo que $a_2 \geq a_1$. Existem infinitos s_n em $[a_2, b_2]$. Escolhemos um desses valores, digamos, s_{i_2} com $i_2 > i_1$.
4. Continuamos o processo. E dessa forma, obtemos uma sequência de intervalos encaixantes:

$$[a_0, b_0] \rightarrow [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2] \rightarrow \dots$$

com comprimentos $L, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \dots$

Demonstração (continuação)

Note que $|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| = \frac{L}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$.

Passo 2 (Obtenção do Limite): A sequência $a_1, a_2, a_3, \dots$ é monótona crescente e limitada superiormente por b_0 . Portanto, ela converge. Denote o limite por s .

Passo 3 (Prova de que $s_{n_k} \rightarrow s$): Seja $\epsilon > 0$. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para s , temos que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - s| < \frac{\epsilon}{2} \text{ sempre que } n \geq N_1.$$

Demonstração (conclusão)

Como s_{i_n} está no intervalo $[a_n, b_n]$, e o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ é $\frac{L}{2^n}$, a distância de s_{i_n} até a_n é no máximo $\frac{L}{2^n}$, o que converge para zero quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |s_{i_n} - a_n| < \frac{\epsilon}{2} \text{ sempre que } n \geq N_2.$$

Escolhendo $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, para $n \geq N$, temos:

$$|s_{i_n} - s| \leq |s_{i_n} - a_n| + |a_n - s| < \epsilon$$

o que conclui a prova. $\square$

Quando uma sequência (s_n) é convergente, os termos se aproximam cada vez mais do valor do limite para valores grandes de n . Consequentemente, eles também se aproximam entre si. Na verdade, essa última propriedade (chamada propriedade de Cauchy) é suficiente para garantir a convergência de sequências reais.

2.46 Definição (Sequências de Cauchy) Uma sequência (s_n) de números reais é chamada de sequência de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, para $m, n \geq N$, temos $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

2.47 Proposição

Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Suponha que (s_n) converge para s . Para mostrar que s_n está próximo de s_m para valores grandes de n e m , usamos o fato de que ambos estão próximos de s . Uma aplicação da desigualdade triangular nos dá:

$$|s_n - s_m| = |s_n - s + s - s_m| \leq |s_n - s| + |s - s_m|$$

Dado um $\varepsilon > 0$, escolhemos um número natural N tal que, para $k \geq N$, temos $|s_k - s| < \varepsilon/2$. Então, para $m, n \geq N$, temos:

$$|s_n - s_m| \leq |s_n - s| + |s - s_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, (s_n) é uma sequência de Cauchy. $\square$

2.48 Proposição

Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. A demonstração é simples e será deixada como exercício. $\square$

2.49 Teorema (Critério de Convergência de Cauchy)

Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Já mostramos que toda sequência convergente é de Cauchy. Agora, suponha que (s_n) seja uma sequência de Cauchy. Como a sequência (s_n) é limitada, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (s_{n_k}) de (s_n) que converge para algum limite $L \in \mathbb{R}$.

Demonstração do Teorema 2.49 (continuação)

Provaremos agora que a sequência original converge para o mesmo limite. Como (s_n) é uma sequência de Cauchy, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um N tal que, para todo $m, n > N$, $|s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Em particular, isso significa que, para $n, n_k > N$, temos $|s_n - s_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como (s_{n_k}) converge para L , existe um índice K tal que, para todo $n_k > K$, temos $|s_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração do Teorema 2.49 (conclusão)

Seja $M = \max(N, K)$. Para $n > M$, podemos usar a desigualdade triangular para obter:

$$|s_n - L| \leq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - L|$$

Escolhendo $n_k > M$, temos $|s_n - s_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|s_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, obtemos:

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mostramos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um M tal que, para todo $n > M$, $|s_n - L| < \varepsilon$. Isso prova que (s_n) converge para L .

Logo toda sequência de Cauchy nos números reais é convergente. $\square$

2.50 Exemplo

Ilustraremos o uso do critério de Cauchy mostrando que a sequência $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ é divergente.

Se $m > n$, então:

$$s_m - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} > \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}$$

Em particular, quando $m = 2n$, temos $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$. Portanto, a sequência (s_n) não pode ser de Cauchy e, assim, não é convergente.

2.51 Teorema

Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado que satisfaz a Propriedade Arquimediana, então $\mathbb{K}$ é completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ é convergente.

Demonstração. A implicação ($\Leftarrow$) já foi demonstrada no Teorema 2.49. Aqui, faremos apenas um esboço da prova da implicação ($\Rightarrow$), deixando como exercício ao leitor completar os detalhes. Seguiremos uma estratégia similar à utilizada no Teorema 2.45. Considere $s \in S \neq \emptyset$ e seja M uma cota superior de S . Defina $a_0 = s$ e $b_0 = M$, e denote $L = |b_0 - a_0|$.

Demonstração do Teorema 2.51 (continuação)

Divida o intervalo $[a_0, b_0]$ ao meio e escolha o subintervalo à direita que contém ao menos um ponto de S , denotando este subintervalo por $[a_1, b_1]$. Repetindo esse processo, obtemos uma sequência de intervalos encaixantes:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

com comprimentos $L, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \dots$

Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \dots$. Se $j > i$, então $|a_i - a_j| \leq \frac{L}{2^i}$. Em um corpo arquimediano, temos que $\frac{L}{2^i} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Portanto, $a_1, a_2, a_3, \dots$ é uma sequência de Cauchy e, conseqüentemente, converge. Denotemos o limite por s . Finalmente, podemos concluir que s é o supremo de S . $\square$

Sequências de Cauchy e Completude

O conceito de que toda sequência de Cauchy converge poderia ser tomado como a definição de completude de um corpo. Em outras palavras poderíamos ter assumido o seguinte axioma:

Axioma 13: Um corpo ordenado é dito completo se e somente é arquimediato e toda sequência de Cauchy converge.

Esse Axioma da Completude pode ser mais intuitivo para o leitor, já que intuitivamente, uma sequência de Cauchy é uma sequência cujos elementos ficam cada vez mais próximos uns dos outros à medida que avançamos.

Essa ideia de "aproximação" entre os termos sugere que a sequência está se "aproximando" de algum valor nos reais, mesmo que inicialmente não saibamos qual é esse valor. Nos reais, toda sequência de Cauchy realmente converge para um número real, o que reflete uma propriedade fundamental desse conjunto: ele é completo, ou seja, não "falta" nenhum número que possa servir de "destino" para a sequência.