

Teorema Fundamental do Cálculo

Partes 1 e 2

Cristian Favio Coletti

Terceiro Quadrimestre de 2025

Sumário

1 Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1

2 Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2

Sumário

1 Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1

2 Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2

TFC - Parte 1: Derivada da Integral

Teorema (TFC - Parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e

$$g'(x) = f(x)$$

Demonstração do TFC - Parte 1

Queremos mostrar que $g'(x) = f(x)$, onde $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

Pela definição de derivada:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Demonstração do TFC - Parte 1

Queremos mostrar que $g'(x) = f(x)$, onde $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

Pela definição de derivada:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (\text{propriedade da integral}) \end{aligned}$$

Demonstração do TFC - Parte 1

Queremos mostrar que $g'(x) = f(x)$, onde $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

Pela definição de derivada:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (\text{propriedade da integral}) \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais:

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) \cdot h \quad \text{para algum } c \text{ entre } x \text{ e } x+h$$

Demonstração do TFC - Parte 1 (continuação)

Portanto:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Demonstração do TFC - Parte 1 (continuação)

Portanto:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Quando $h \rightarrow 0$, temos que $c \rightarrow x$, e como f é contínua:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Demonstração do TFC - Parte 1 (continuação)

Portanto:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Quando $h \rightarrow 0$, temos que $c \rightarrow x$, e como f é contínua:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Logo:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Q.E.D.

Exemplo 1: Aplicação do TFC - Parte 1

Exemplo

Encontre a derivada de $g(x) = \int_1^x (t^2 + 1) dt$

Exemplo 1: Aplicação do TFC - Parte 1

Exemplo

Encontre a derivada de $g(x) = \int_1^x (t^2 + 1) dt$

Pelo TFC - Parte 1:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_1^x (t^2 + 1) dt \right] = x^2 + 1$$

Exemplo 1: Aplicação do TFC - Parte 1

Exemplo

Encontre a derivada de $g(x) = \int_1^x (t^2 + 1) dt$

Pelo TFC - Parte 1:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_1^x (t^2 + 1) dt \right] = x^2 + 1$$

Resposta: $g'(x) = x^2 + 1$

Exemplo 1: Aplicação do TFC - Parte 1

Exemplo

Encontre a derivada de $g(x) = \int_1^x (t^2 + 1) dt$

Pelo TFC - Parte 1:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_1^x (t^2 + 1) dt \right] = x^2 + 1$$

Resposta: $g'(x) = x^2 + 1$

Observação

Não precisamos calcular a integral primeiro! O TFC nos dá a resposta diretamente.

Exemplo 2: Limite Superior como Função

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \cos(t) dt \right]$

Exemplo 2: Limite Superior como Função

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \cos(t) dt \right]$

Usamos a Regra da Cadeia com o TFC:

Seja $u = x^2$, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \cos(t) dt \right] &= \frac{d}{du} \left[\int_0^u \cos(t) dt \right] \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos(u) \cdot 2x \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

Exemplo 2: Limite Superior como Função

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \cos(t) dt \right]$

Usamos a Regra da Cadeia com o TFC:

Seja $u = x^2$, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \cos(t) dt \right] &= \frac{d}{du} \left[\int_0^u \cos(t) dt \right] \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos(u) \cdot 2x \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

Resposta: $2x \cos(x^2)$

Exemplo 3: Caso Mais Complexo

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt \right]$

Exemplo 3: Caso Mais Complexo

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt \right]$

Primeiro, invertemos os limites de integração:

$$\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt = - \int_3^x \sqrt{1+t^4} dt$$

Exemplo 3: Caso Mais Complexo

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt \right]$

Primeiro, invertemos os limites de integração:

$$\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt = - \int_3^x \sqrt{1+t^4} dt$$

Agora aplicamos o TFC:

$$\frac{d}{dx} \left[- \int_3^x \sqrt{1+t^4} dt \right] = -\sqrt{1+x^4}$$

Exemplo 3: Caso Mais Complexo

Exemplo

Encontre $\frac{d}{dx} \left[\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt \right]$

Primeiro, invertemos os limites de integração:

$$\int_x^3 \sqrt{1+t^4} dt = - \int_3^x \sqrt{1+t^4} dt$$

Agora aplicamos o TFC:

$$\frac{d}{dx} \left[- \int_3^x \sqrt{1+t^4} dt \right] = -\sqrt{1+x^4}$$

Resposta: $-\sqrt{1+x^4}$

Sumário

1 Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1

2 Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2

TFC - Parte 2: Cálculo de Integrais Definidas

Teorema (TFC - Parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

TFC - Parte 2: Cálculo de Integrais Definidas

Teorema (TFC - Parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Notação

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

TFC - Parte 2: Cálculo de Integrais Definidas

Teorema (TFC - Parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Notação

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Importância

- Conecta integrais definidas com primitivas
- Fornece método prático para calcular integrais
- Resolve o problema da área

Demonstração do TFC - Parte 2

Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo TFC - Parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$.

Se F é qualquer primitiva de f , então $F'(x) = f(x)$.

Demonstração do TFC - Parte 2

Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo TFC - Parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$.

Se F é qualquer primitiva de f , então $F'(x) = f(x)$.

Pelo Teorema do Valor Médio (para derivadas), se duas funções têm a mesma derivada, elas diferem por uma constante:

$$g(x) = F(x) + C$$

Demonstração do TFC - Parte 2

Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo TFC - Parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$.

Se F é qualquer primitiva de f , então $F'(x) = f(x)$.

Pelo Teorema do Valor Médio (para derivadas), se duas funções têm a mesma derivada, elas diferem por uma constante:

$$g(x) = F(x) + C$$

Avaliamos em $x = a$:

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

Demonstração do TFC - Parte 2

Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo TFC - Parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$.

Se F é qualquer primitiva de f , então $F'(x) = f(x)$.

Pelo Teorema do Valor Médio (para derivadas), se duas funções têm a mesma derivada, elas diferem por uma constante:

$$g(x) = F(x) + C$$

Avaliamos em $x = a$:

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

Portanto:

$$g(x) = F(x) - F(a)$$

Demonstração do TFC - Parte 2

Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo TFC - Parte 1, sabemos que $g'(x) = f(x)$.

Se F é qualquer primitiva de f , então $F'(x) = f(x)$.

Pelo Teorema do Valor Médio (para derivadas), se duas funções têm a mesma derivada, elas diferem por uma constante:

$$g(x) = F(x) + C$$

Avaliamos em $x = a$:

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

Portanto:

$$g(x) = F(x) - F(a)$$

Avaliando em $x = b$:

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Q.E.D.

Exemplo 4: Cálculo de Integral Simples

Exemplo

Calcule $\int_1^3 (x^2 + 2x) dx$

Exemplo 4: Cálculo de Integral Simples

Exemplo

Calcule $\int_1^3 (x^2 + 2x) dx$

- ① Encontramos uma primitiva:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$$

Exemplo 4: Cálculo de Integral Simples

Exemplo

Calcule $\int_1^3 (x^2 + 2x) dx$

- ① Encontramos uma primitiva:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$$

- ② Aplicamos o TFC - Parte 2:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (x^2 + 2x) dx &= F(3) - F(1) \\ &= \left(\frac{27}{3} + 9\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) \\ &= (9 + 9) - \left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

Exemplo 4: Cálculo de Integral Simples

Exemplo

Calcule $\int_1^3 (x^2 + 2x) dx$

- ① Encontramos uma primitiva:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$$

- ② Aplicamos o TFC - Parte 2:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (x^2 + 2x) dx &= F(3) - F(1) \\ &= \left(\frac{27}{3} + 9\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) \\ &= (9 + 9) - \left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

Exemplo 5: Integral de Função Trigonométrica

Exemplo

Calcule $\int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta \, d\theta$

Exemplo 5: Integral de Função Trigonométrica

Exemplo

Calcule $\int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta \, d\theta$

Uma primitiva de $\sec^2 \theta$ é $\tan \theta$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta \, d\theta &= \tan \theta \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) - \tan(0) \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Exemplo 5: Integral de Função Trigonométrica

Exemplo

Calcule $\int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta \, d\theta$

Uma primitiva de $\sec^2 \theta$ é $\tan \theta$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sec^2 \theta \, d\theta &= \tan \theta \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Resposta: 1

Exemplo 6: Integral com Valor Absoluto

Exemplo

Calcule $\int_0^3 |x - 2| dx$

Exemplo 6: Integral com Valor Absoluto

Exemplo

Calcule $\int_0^3 |x - 2| dx$

Primeiro, analisamos o valor absoluto:

$$|x - 2| = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 6: Integral com Valor Absoluto

Exemplo

Calcule $\int_0^3 |x - 2| dx$

Primeiro, analisamos o valor absoluto:

$$|x - 2| = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < 2 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Dividimos a integral:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x - 2| dx &= \int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^3 (x - 2) dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \end{aligned}$$

Exemplo 6: Continuação

Avaliando as integrais:

$$\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = (4 - 2) - (0 - 0) = 2$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 &= \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2 - 4) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right) - (-2) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exemplo 6: Continuação

Avaliando as integrais:

$$\left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = (4 - 2) - (0 - 0) = 2$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 &= \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) \\ &= \left(-\frac{3}{2} \right) - (-2) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_0^3 |x - 2| dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Exemplo 6: Continuação

Avaliando as integrais:

$$\left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = (4 - 2) - (0 - 0) = 2$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 &= \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) \\ &= \left(-\frac{3}{2} \right) - (-2) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\int_0^3 |x - 2| dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: $\frac{5}{2}$

Exemplo 7: Aplicação Física

Exemplo

Uma partícula se move ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t) = t^2 - 3t + 2$ m/s. Encontre o deslocamento da partícula no intervalo $[1, 4]$.

Exemplo 7: Aplicação Física

Exemplo

Uma partícula se move ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t) = t^2 - 3t + 2$ m/s. Encontre o deslocamento da partícula no intervalo $[1, 4]$.

O deslocamento é dado pela integral da velocidade:

$$\text{Deslocamento} = \int_1^4 (t^2 - 3t + 2) dt$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}\int_1^4 (t^2 - 3t + 2) dt &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{3} - 24 + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \\ &= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Exemplo 7: Continuação

Continuando o cálculo:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{64}{3} - \frac{48}{3} \right) - \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) \\ &= \frac{16}{3} - \frac{5}{6} = \frac{32}{6} - \frac{5}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 7: Continuação

Continuando o cálculo:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{64}{3} - \frac{48}{3} \right) - \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) \\ &= \frac{16}{3} - \frac{5}{6} = \frac{32}{6} - \frac{5}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Resposta: O deslocamento é $\frac{9}{2}$ metros.