

Sequências e a topologia da reta

2.12 Sequências e a topologia da reta

Conjuntos fechados também podem ser caracterizados em termos de sequências.

2.64 Proposição Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, o limite de toda sequência convergente em F pertence a F .

Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfaz a Propriedade do Valor Intermediário se $f : [a, b] \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Temos a seguinte equivalência: Um corpo $\mathbb{K}$ é completo se e somente se a Propriedade do Valor Intermediário é satisfeita.

Esse resultado justifica, ao menos em parte, a exigência de que um corpo seja completo para o desenvolvimento da Análise. A completude é fundamental porque permite a demonstração do Teorema do Valor Intermediário (e também do Teorema do Valor Médio), e o permitindo a existência de soluções para equações dentro de intervalos determinados. Sem essa propriedade, muitos dos resultados e teoremas centrais da Análise não poderiam ser assegurados.

Demonstração da Proposição 2.64

Demonstração. Suponha primeiro que F é fechado e que (x_n) é uma sequência convergente de pontos $x_n \in F$ tal que $x_n \rightarrow x$. Então, toda vizinhança de x contém pontos $x_n \in F$. Isso implica que $x \notin F^c$, já que F^c é aberto e todo $y \in F^c$ possui uma vizinhança $V \subset F^c$ que não contém pontos em F . Portanto, $x \in F$.

Reciprocamente, suponha que o limite de toda sequência convergente de pontos em F pertença a F . Seja $x \in F^c$. Então, x deve ter uma vizinhança $V \subset F^c$; caso contrário, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F$ tal que $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$, de modo que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, e x seria o limite de uma sequência em F . Assim, F^c é aberto e F é fechado. $\square$

2.65 Proposição

A seguinte proposição fornece uma definição sequencial de um ponto de acumulação.

2.65 Proposição Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em A com $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha que $x \in \mathbb{R}$ seja um ponto de acumulação de A .

Logo temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A \setminus \{x\}$ tal que $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$. Segue-se que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Reciprocamente, se x é o limite de uma sequência (x_n) em A com $x_n \neq x$, e V é uma vizinhança de x , então $x_n \in V \setminus \{x\}$ para n suficientemente grande, o que prova que x é um ponto de acumulação de A . $\square$

2.66 Exemplo

Se

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

então 0 é um ponto de acumulação de A , pois $(1/n)$ é uma sequência em A tal que $1/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, 1 não é um ponto de acumulação de A , pois não existem sequências em A com termos distintos de 1 que convergem para 1. Todos os elementos de A diferentes de 1 são menores que $\frac{1}{2}$, e logo não se aproximam de 1.

Limite inferior e limite superior

Propriedades

Cristian Coletti

2.13 Limite inferior e limite superior

Se uma sequência é limitada, a divergência significa que ela pode oscilar em uma região limitada sem tender a um ponto específico em $\mathbb{R}$.

Às vezes, é útil entender essas oscilações conforme n tende ao infinito o que nos leva aos conceitos de Limite Superior e Limite Inferior. Suponha que temos uma sequência real limitada (a_n) . Como (a_n) é uma sequência limitada, seu supremo existe no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Além disso, isso implica que para qualquer subsequência de (a_n) , seu supremo também existe. Assim, podemos definir uma nova sequência real (b_n) onde:

$$b_n = \sup_{m \geq n} a_m = \sup\{a_m : m \geq n\}.$$

É claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq \sup_{m \geq n} a_m = b_n$. Como a sequência (a_n) é limitada inferiormente, a sequência (b_n) também é limitada inferiormente. Além disso, observamos que a sequência (b_n) é decrescente. De fato, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos a inclusão de conjuntos $\{a_m : m \geq n+1\} \subseteq \{a_m : m \geq n\}$, o que, pela Proposição 1.63, implica a desigualdade $b_{n+1} = \sup\{a_m : m \geq n+1\} \leq \sup\{a_m : m \geq n\} = b_n$.

Portanto, pelo Teorema de Bolzano, a sequência (b_n) converge e converge

2.67 Definição (Limite Superior e Limite Inferior)

Seja (a_n) uma sequência real limitada. Definimos o limite superior dessa sequência como:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right).$$

Analogamente, o limite inferior dessa sequência é definido como:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} a_m \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} a_m \right).$$

2.68 Definição (Oscilação de uma sequência) Seja (a_n) uma sequência limitada de números reais. A oscilação $\omega(a_n)$ dessa sequência é definida como a diferença entre o limite superior e o limite inferior de (a_n) :

$$\omega(a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Como veremos a oscilação é zero se, e somente se, a sequência converge.

2.69 Exemplos

1. Para a sequência $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ temos que o limite inferior é -1 e o limite superior é 1 .
2. Para a sequência $(\frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 2, \frac{3}{4}, 2, \frac{4}{5}, 2, \frac{5}{6}, 2, \frac{6}{7}, \dots)$, temos que o limite inferior é 1 e o limite superior é 2 .
3. Para a sequência $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \dots)$, temos que o limite inferior é -1 e o limite superior é 1 .
4. Para a sequência $a_n = \sin n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ temos que o limite inferior é -1 e o limite superior é 1 .

Os conceitos de limite superior e limite inferior são úteis para estudar o comportamento de qualquer sequência limitada, pois essas quantidades sempre existem, ao contrário do limite. Assim, em casos em que o limite de uma sequência não existe, o limite superior e o limite inferior podem ser usados como bons substitutos para analisar o comportamento da sequência quando n tende ao infinito.

2.70 Teorema

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Então (a_n) converge se, e somente se, ela é limitada e $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Demonstração. Prova da implicação $\Leftarrow$. Suponha que (a_n) é limitada e que $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Seja $L := \limsup a_n = \liminf a_n$. Defina $M_n = \sup\{a_k\}_{k \geq n}$ e $m_n = \inf\{a_k\}_{k \geq n}$. Então, para todo n , temos

$$m_n \leq a_n \leq M_n.$$

Como (M_n) e (m_n) convergem para L , pelo Teorema do Confronto (a_n) também converge para L .

Prova da implicação $\Rightarrow$. Suponha que (a_n) converge para L .

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, temos

$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. De onde concluímos que a sequência (a_n) é limitada e que $L - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq L + \varepsilon$. Logo,

$$|\limsup a_n - L| < \varepsilon \quad |\liminf a_n - L| < \varepsilon.$$

Como isso é verdadeiro para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $\liminf a_n = L$ e

2.14 Propriedades do limite superior e inferior

Nessa seção apresentaremos algumas propriedades do Limite superior e inferior.

2.71 Proposição Sejam (a_n) e (b_n) seqüências reais limitadas.

① Se $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{e} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

② Para a seqüência (a_n) , temos

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

③ O limite superior é subaditivo, ou seja,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

④ O limite inferior é superaditivo, ou seja,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Demonstração da Proposição 2.71

Demonstração.

1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo e $j \geq n$, temos $a_j \leq b_j \leq \sup_{m \geq n} b_m$. Assim, $\sup_{m \geq n} b_m$ é um majorante para o conjunto $\{a_j : j \geq n\}$, o que implica que $\sup_{j \geq n} a_j \leq \sup_{m \geq n} b_m$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ e usando a Proposição 2.39, obtemos o resultado. A desigualdade para o limite inferior é deduzida de forma análoga.

2. Para a desigualdade intermediária, por definição, temos a ordenação $\inf_{m \geq n} a_m \leq \sup_{m \geq n} a_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados, obtemos $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Para a primeira desigualdade observamos que o ínfimo de um conjunto é sempre menor ou igual ao ínfimo de qualquer um de seus subconjuntos. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $\inf_{j \in \mathbb{N}} a_j \leq \inf_{m \geq n} a_m$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} a_j \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} a_m \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

A última desigualdade é demonstrada de maneira similar.

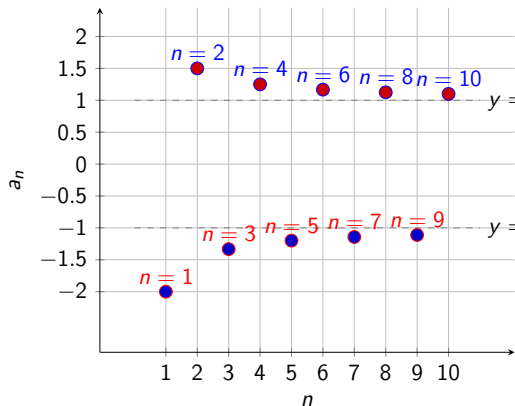
3. Primeiro, observamos que a sequência $(a_n + b_n)$ também é limitada, então seu limite superior existe. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo e $j \geq n$, temos $a_j + b_j \leq \sup_{m \geq n} a_m + \sup_{m \geq n} b_m$. Tomando o supremo para $j \geq n$, obtemos $\sup_{j \geq n} (a_j + b_j) \leq \sup_{m \geq n} a_m + \sup_{m \geq n} b_m$. Assim, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados da desigualdade chegamos à desigualdade desejada.

A prova para a última afirmação é similar à da terceira afirmação. $\square$

2.72 Exemplo

Seja (a_n) a sequência real definida por $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Um gráfico dos primeiros termos desta sequência pode ser visto na Figura.

Primeiros 10 termos da sequência



Esta sequência não converge, pois as subsequências (a_{2n}) e (a_{2n+1}) convergem para 1 e -1 , respectivamente. No entanto, essa sequência é limitada, uma vez que $|a_n| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que garante a existência de seu limite superior e limite inferior. Vamos calcular esses valores.

Exemplo 2.72 (continuação)

Observe que todos os termos com índice par nesta sequência são positivos, enquanto os termos com índice ímpar são negativos. Logo, ao buscar o supremo, podemos ignorar os termos de índice ímpar, pois eles são claramente menores que qualquer um dos termos de índice par. Assim:

$$\sup_{m \geq n} a_m = \sup_{\substack{m \geq n \\ m \text{ par}}} a_m = \sup_{\substack{m \geq n \\ m \text{ par}}} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1 + \frac{1}{p(n)},$$

onde $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é a função que associa a cada n o menor inteiro par maior ou igual a n . Essa função é dada por $p(n) = 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, sendo crescente e ilimitada. Assim, pelo que estabelece a Proposição 5.9.5, deduzimos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p(n)} \right) = 1.$$

Usando um argumento similar, podemos mostrar que $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

2.73 Proposição

Seja (a_n) uma sequência real limitada. Então:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n > r \text{ para infinitos valores de } n\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{r \in \mathbb{R} : a_n < r \text{ para infinitos valores de } n\}.$$

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira igualdade. Denote o conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} : a_n > r \text{ para infinitos valores de } n\} \subseteq \mathbb{R}$.

1. Primeiro, mostramos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \sup(A)$. Escolha qualquer $x \in A$. Pela definição do conjunto A , existem infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ para os quais $a_n > x$. Isso significa que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo, existe um índice $j \geq n$ tal que $a_j > x$. Assim, temos que $\sup_{m \geq n} a_m > x$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq x$. Como $x \in A$ é arbitrário, isso implica que o conjunto A é limitado superiormente por $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, de modo que temos a desigualdade $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \sup(A)$.

Demonstração da Proposição 2.73 (continuação)

2. Para mostrar a desigualdade oposta, vamos provar que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon \in A$ para todo $\varepsilon > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, para satisfazer as condições sobre o conjunto A , precisamos encontrar uma quantidade infinita de termos a_n que seja maior que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon$. Observe que para $\sup_{m \geq 1} a_m$ com $n = 1$, pela caracterização do supremo, podemos encontrar um índice $k_1 \geq 1$ tal que $\sup_{m \geq 1} a_m - \varepsilon < a_{k_1} \leq \sup_{m \geq 1} a_m$. Isso implica que:

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq p} a_m - \varepsilon \leq \sup_{m \geq 1} a_m - \varepsilon < a_{k_1}.$$

Encontramos nosso primeiro termo na sequência que é maior que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon$. Para o segundo termo, considerando $\sup_{m \geq k_1+1} a_m$ pela caracterização do supremo, podemos encontrar um índice $k_2 \geq k_1 + 1$ tal que $\sup_{m \geq k_1+1} a_m - \varepsilon < a_{k_2} \leq \sup_{m \geq k_1+1} a_m$. Isso implica que:

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq p} a_m - \varepsilon \leq \sup_{m \geq k_1+1} a_m - \varepsilon < a_{k_2}.$$

Demonstração da Proposição 2.73 (conclusão)

Indutivamente, para cada $j \in \mathbb{N}$, usando $n = k_j + 1$ no argumento acima, podemos encontrar um índice $k_{j+1} \geq k_j + 1$ tal que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon < a_{k_{j+1}}$. Portanto, há infinitos termos de (a_n) que são maiores que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon$.

Assim, pela definição, $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon \in A$. Isso significa que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p - \varepsilon \leq \sup(A)$ para todo $\varepsilon > 0$. Dai, concluímos que $\limsup_{p \rightarrow \infty} a_p \leq \sup(A)$.

Juntando as duas desigualdades, obtemos a igualdade desejada. $\square$