

Convergência

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Convergência é um aspecto importante do cálculo de probabilidades. Pode ser definida de várias formas, cada tipo de convergência tendo seu próprio interesse e campo de aplicação específico. Como de costume, assumiremos um espaço de probabilidade subjacente $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definition (Definição 3.1)

Sejam $X, X_n, n \geq 1$, v.a.'s no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definition (Continuação)

(a) Se $X, X_n, n \geq 1$, tomam seus valores em um espaço métrico (E, d) , dizemos que a sequência $(X_n)_n$ converge para X **em probabilidade** (escrito $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \stackrel{P}{=} X$) se para todo $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(d(X_n, X) > \delta) = 0.$$

(b) Se $X, X_n, n \geq 1$, tomam seus valores em um espaço topológico E , dizemos que $(X_n)_n$ converge para X **quase certamente (q.c.)** se existe um evento negligenciável $N \in \mathcal{F}$ tal que para todo $\omega \in N^c$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Definition (Definição 3.1 (continuação))

(c) Se $X, X_n, n \geq 1$, são com valores em $\mathbb{R}^m$, dizemos que $(X_n)_n$ converge para X **em** L^p se $X_n \in L^p$ para todo n e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^p)^{1/p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_p = 0.$$

(a) Lembrando que para probabilidades a norma L^p é uma função crescente de p , convergência em L^p implica convergência em L^q para todo $q \leq p$.

(b) Na verdade, convergência em L^p pode ser definida para v.a.'s com valores em um espaço normado.

Convergência

Dedicaremos nossa atenção ao caso Euclidiano, mas todas as propriedades que veremos também valem para v.a.'s com valores em um espaço normado completo geral.

Neste caso L^p é um espaço de Banach.

(c) Lembre-se da desigualdade

$$|||X||_p - ||Y||_p| \leq \|X - Y\|_p.$$

Portanto, convergência em L^p acarreta convergência das normas L^p .

Vamos comparar esses diferentes tipos de convergência.

Assuma as v.a.'s $(X_n)_n$ serem com valores em $\mathbb{R}^m$: pela desigualdade de Markov temos, para todo $p > 0$,

$$P(|X_n - X| > \delta) \leq \frac{1}{\delta^p} E(|X_n - X|^p),$$

logo

Convergência em L^p , $p > 0$, implica convergência em probabilidade.

Se a sequência $(X_n)_n$, com valores em um espaço métrico (E, d) , converge q.c. para uma v.a. X , então $d(X_n, X) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ q.c., i.e., para todo $\delta > 0$, $1_{[d(X_n, X) > \delta]} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ q.c. e pelo Teorema de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(d(X_n, X) > \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(1_{[d(X_n, X) > \delta]}) = 0,$$

i.e.

convergência q.c. implica convergência em probabilidade.

A recíproca não é verdadeira, como mostrado no Exemplo 3.5 abaixo.

Note que convergência em probabilidade depende apenas das leis conjuntas de X e de cada X_n , enquanto convergência q.c. depende de forma mais profunda das distribuições conjuntas das X_n 's e X .

É fácil construir exemplos de sequências convergindo q.c. mas não em L^p : estes dois modos de convergência não são comparáveis, mesmo que convergência q.c. seja geralmente considerada mais forte.

A investigação da convergência q.c. requer uma ferramenta importante introduzida na próxima seção.

Convergência Quase Certa e o Lema de Borel-Cantelli

Seja $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ uma sequência de eventos e seja

$$A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

A é o **limite superior** dos eventos $(A_n)_n$.

Um olhar mais atento a esta definição mostra que $\omega \in A$ se e somente se

$$\omega \in \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{para todo } n,$$

isto é, se e somente se $\omega \in A_k$ para infinitos índices k , i.e.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega; \omega \in A_k \text{ para infinitos índices } k\}. \quad (3.1)$$

O nome "limite superior" vem do fato de que

$$1_A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 1_{A_n}.$$

Convergência e Borel-Cantelli

Claramente, o limite superior de uma sequência $(A_n)_n$ não depende dos eventos "iniciais" $A_1, \dots, A_k$.

Logo, pertence à σ -álgebra de cauda

$$\mathbb{B}^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma(1_{A_i}, 1_{A_{i+1}}, \dots)$$

e, se os eventos $A_1, A_2, \dots$ são independentes, pelo Teorema de Kolmogorov 2.15 seu limite superior só pode ter probabilidade 0 ou 1. O resultado a seguir fornece uma ferramenta simples e poderosa para estabelecer qual dessas eventualidades ocorre.

Teorema 3.3 (Lema de Borel-Cantelli)

Seja $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$ uma sequência de eventos.

Teorema 3.3 (continuação)

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ então $P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ e os eventos A_n são independentes então $P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$.

Demonstração (a): Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}\right)$$

mas $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ é exatamente o evento $\{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = +\infty\}$: se $\omega \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ então $\omega \in A_n$ para infinitos índices e portanto na série do lado direito há infinitos termos iguais a 1.

Logo, se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$ é integrável e o evento $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ é negligenciável (o conjunto de ω 's nos quais uma função integrável toma o valor $+\infty$ é negligenciável, Exercício 1.9).

(b) Por definição, a sequência de eventos

$$\left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)_n$$

decrece para $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. Logo

$$P\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right). \quad (3.2)$$

Vamos provar que, para todo n , $P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1$ ou, o que é o mesmo, que

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0.$$

Temos, sendo os A_n independentes,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N P(A_k^c) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)). \end{aligned}$$

Como assumimos $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, o produto infinito acima se anula por um resultado de convergência bem conhecido para produtos infinitos (recordado na próxima proposição).

Portanto $P(-\text{Cantell} \cup \sup_{k \geq n} A_k) = 1$ para todo n e o limite em (3.2) é igual a 1.

Proposição 3.4

Seja $(u_k)_k$ uma sequência de números com $0 \leq u_k \leq 1$ e seja

$$a \prod_{k=1}^{\infty} (1 - u_k).$$

Então

- (a) Se $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty$ então $a = 0$.
- (b) Se $u_k < 1$ para todo k e $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < +\infty$ então $a > 0$.

Demonstração:

(a) A desigualdade $1 - x \leq e^{-x}$ dá

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 - u_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{-u_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \sum_{k=1}^n u_k \right) = 0.$$

Fig. 3.1 Os gráficos de $x \mapsto 1 - x$ junto com $x \mapsto e^{-x}$ (pontos, o superior) e $x \mapsto e^{-2x}$.

(b) Temos $1 - x \geq e^{-2x}$ para $0 \leq x \leq \delta$ para algum $\delta > 0$ (veja Fig. 3.1). Como $\sum_{k=1}^{\infty} u_k < +\infty$, temos $u_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$, de modo que $u_k \leq \delta$ para $k \geq n_0$.

Logo

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (1 - u_k) &= \prod_{k=1}^{n_0} (1 - u_k) \prod_{k=n_0+1}^n (1 - u_k) \geq \prod_{k=1}^{n_0} (1 - u_k) \prod_{k=n_0+1}^n e^{-2u_k} \\ &= \prod_{k=1}^{n_0} (1 - u_k) \times \exp \left(-2 \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right) \end{aligned}$$

e quando $n \rightarrow \infty$ isso converge para

$$\prod_{k=1}^{n_0} (1 - u_k) \times \exp \left(-2 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} u_k \right) > 0.$$

Example (Exemplo 3.5)

Seja $(X_n)_n$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. tendo uma lei exponencial de parâmetro λ e seja $c > 0$.

Qual é a probabilidade do evento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_n \geq c \log n\} \quad (3.3)$$

Note que os eventos $\{X_n \geq c \log n\}$ têm uma probabilidade que decresce para 0, pois as X_n têm a mesma lei.

Mas, pelo menos se a constante c for suficientemente pequena, poderá ser verdade que $X_n \geq c \log n$ para infinitos índices n q.c.?

O lema de Borel-Cantelli permite enfrentar esta questão de forma simples: como estes eventos são independentes, basta determinar a natureza da série