

Complementos Úteis: Lema de Slutsky e Método Delta

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Método Delta

Uma aplicação útil do Lema de Slutsky é a seguinte.

Teorema 3.47 (Método Delta) Seja $(Z_n)_n$ uma sequência de v.a.'s com valores em $\mathbb{R}^d$, tal que

$$\sqrt{n}(Z_n - z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0, C).$$

Seja $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ um mapa diferenciável com uma derivada contínua em z . Então

$$\sqrt{n}(\Phi(Z_n) - \Phi(z)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Phi'(z)C\Phi'(z)^*).$$

Prova (caso $m = 1$)

Graças ao Lema de Slutsky 3.45(b), temos

$$Z_n - z = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n}(Z_n - z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0 \cdot Z = 0.$$

Logo, pela Proposição 3.29(b), $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} z$. Vamos primeiro provar a afirmação para $m = 1$, de modo que Φ é real.

Uso do teorema do valor médio

Pelo teorema do valor médio, podemos escrever

$$\sqrt{n}(\Phi(Z_n) - \Phi(z)) = \sqrt{n}\Phi'(\tilde{Z}_n)(Z_n - z), \quad (3.43)$$

onde $\tilde{Z}_n$ é um vetor (aleatório) no segmento entre z e Z_n de modo que $|\tilde{Z}_n - z| \leq |Z_n - z|$. Segue que $|\tilde{Z}_n - z| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ em probabilidade e em lei.

Convergência da derivada

Como Φ' é contínua em z , $\Phi'(\tilde{Z}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \Phi'(z)$ pela Observação 3.16. Portanto (3.43) dá

$$\sqrt{n}(\Phi(Z_n) - \Phi(z)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \Phi'(z)Z$$

e a afirmação segue pelo Lema de Slutsky, lembrando como as leis gaussianas se transformam sob mapas lineares.

Caso $m > 1$

Em dimensão $m > 1$ o teorema do valor médio na forma acima não está disponível, mas a ideia é bastante similar. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\Phi(Z_n) - \Phi(z)) &= \sqrt{n} \int_0^1 \frac{d}{ds} \Phi(z + s(Z_n - z)) ds \\ &= \sqrt{n} \int_0^1 \Phi'(z + s(Z_n - z))(Z_n - z) ds \\ &= \sqrt{n} \Phi'(z)(Z_n - z) + \underbrace{\sqrt{n} \int_0^1 (\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z))(Z_n - z) ds}_{:= I_n}\end{aligned}$$

Decomposição da prova

Temos

$$\sqrt{n}\Phi'(z)(Z_n - z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, \Phi'(z)C\Phi'(z)^*),$$

de modo que, pelo Lema de Slutsky, a prova está completa se provarmos que $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

Temos

$$|I_n| \leq |\sqrt{n}(Z_n - z)| \times \sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)|.$$

Agora $|\sqrt{n}(Z_n - z)| \xrightarrow{\mathcal{L}} |Z|$ e o resultado seguirá do Lema de Slutsky novamente se pudermos mostrar que

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0.$$

Prova da convergência do supremo

Seja $\epsilon > 0$. Como Φ' é assumida contínua em z , seja $\delta > 0$ tal que $|\Phi'(z+x) - \Phi'(z)| \leq \epsilon$ sempre que $|x| \leq \delta$. Então temos

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)| > \epsilon\right) \\ &= \underbrace{P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)| > \epsilon, |Z_n - z| \leq \delta\right)}_{=0} \\ &+ P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)| > \epsilon, |Z_n - z| > \delta\right). \end{aligned}$$

Continuação da Prova

$$\begin{aligned} &+ P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)| > \epsilon, |Z_n - z| > \delta\right) \\ &\leq P(|Z_n - z| > \delta) \end{aligned}$$

de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\Phi'(z + s(Z_n - z)) - \Phi'(z)| > \epsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - z| > \delta) = 0$$