

A 01. Uma (rápida) revisão: Noções elementares da Teoria da Medida

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

O espaço de probabilidade

O bloco fundamental da probabilidade é a terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de um conjunto Ω e P uma probabilidade.

O bloco fundamental da probabilidade é a terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de um conjunto Ω e P uma probabilidade.

Este é o cenário típico da teoria da medida. Neste primeiro capítulo, percorreremos os pontos principais desta teoria.

O bloco fundamental da probabilidade é a terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde $\mathcal{F}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de um conjunto Ω e P uma probabilidade.

Este é o cenário típico da teoria da medida. Neste primeiro capítulo, percorreremos os pontos principais desta teoria.

Omitiremos as provas mais técnicas e focaremos nos resultados, seu uso e nas formas típicas de raciocínio.

Definição: Seja E um conjunto e $\mathcal{E}$ uma família de subconjuntos de E .
 $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra (resp. uma álgebra) se

Definição: Seja E um conjunto e $\mathcal{E}$ uma família de subconjuntos de E . $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra (resp. uma álgebra) se

$E \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ é estável em relação ao complemento; $\mathcal{E}$ é estável em relação a uniões enumeráveis (resp. finitas).

Definição: Seja E um conjunto e $\mathcal{E}$ uma família de subconjuntos de E . $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra (resp. uma álgebra) se

$E \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ é estável em relação ao complemento; $\mathcal{E}$ é estável em relação a uniões enumeráveis (resp. finitas).

Em outras palavras, se $A \in \mathcal{E}$ então também $A^c \in \mathcal{E}$ e que se $(A_n)_n \subset \mathcal{E}$ então também $\bigcup_n A_n \in \mathcal{E}$. Claro $\emptyset = E^c \in \mathcal{E}$.

Na verdade, uma σ -álgebra também é estável em relação a interseções contáveis: se $(A_n)_n \subset \mathcal{E}$ então podemos escrever

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c,$$

de modo que também $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$.

Um par $(E, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra em E , é um espaço mensurável.

Um par $(E, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra em E , é um espaço mensurável.

Claro que a família $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de E é uma σ -álgebra.

Um par $(E, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra em E , é um espaço mensurável.

Claro que a família $\mathcal{P}(E)$ de todos os subconjuntos de E é uma σ -álgebra.

É imediato que a interseção de qualquer família de σ -álgebras é uma σ -álgebra.

Portanto, dada uma classe de conjuntos $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, podemos considerar a menor σ -álgebra contendo $\mathcal{E}$:

Portanto, dada uma classe de conjuntos $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, podemos considerar a menor σ -álgebra contendo $\mathcal{E}$:

É a interseção de todas as σ -álgebras contendo $\mathcal{E}$ (tal família é não vazia pois certamente $\mathcal{P}(E)$ pertence a ela).

Portanto, dada uma classe de conjuntos $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, podemos considerar a menor σ -álgebra contendo $\mathcal{E}$:

É a interseção de todas as σ -álgebras contendo $\mathcal{E}$ (tal família é não vazia pois certamente $\mathcal{P}(E)$ pertence a ela).

É a σ -álgebra gerada por $\mathcal{E}$, denotada $\sigma(\mathcal{E})$.

Definição 1.1 Uma classe monótona é uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de E tal que

- $E \in \mathcal{M}$,
- $\mathcal{M}$ é estável em relação ao complemento relativo, i.e. se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subset B$, então $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
- $\mathcal{M}$ é estável em relação a limites crescentes: se $(A_n)_n \subset \mathcal{M}$ é uma sequência crescente de conjuntos, então $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$.

Oservação: Note que uma σ -álgebra é uma classe monótona.

Classe monótona vs σ -álgebra

Oservação: Note que uma σ -álgebra é uma classe monótona.

Por outro lado, provar que uma família de conjuntos é uma classe monótona pode ser mais fácil do que provar que é uma σ -álgebra. Por este motivo, o próximo resultado será útil.

Teorema 1.2 (Teorema da Classe Monótona)

Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ uma família de conjuntos que é estável em relação a interseções finitas e seja $\mathcal{M}$ uma classe monótona contendo $\mathcal{E}$. Então $\mathcal{M}$ também contém $\sigma(\mathcal{E})$.

Definição 1.3

- Seja E um espaço topológico e $\mathcal{C}$ a classe de todos os abertos de E . A σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C})$ (i.e. a menor contendo todos os abertos) é a σ -álgebra de Borel de E , denotada $\mathcal{B}(E)$.

Definição 1.3

- Seja E um espaço topológico e $\mathcal{C}$ a classe de todos os abertos de E . A σ -álgebra $\sigma(\mathcal{C})$ (i.e. a menor contendo todos os abertos) é a σ -álgebra de Borel de E , denotada $\mathcal{B}(E)$.
- Claro que $\mathcal{B}(E)$ é também a menor σ -álgebra contendo todos os fechados.

Se E é um espaço métrico separável, então $\mathcal{B}(E)$ é também gerada por famílias menores de conjuntos.

Exemplo 1.4 Suponha que E é um espaço métrico separável e seja $D \subset E$ um subconjunto denso. Então a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ é também gerada pela família $\mathcal{D}$ das bolas centradas em D com raio racional

Se E é um espaço métrico separável, então $\mathcal{B}(E)$ é também gerada por famílias menores de conjuntos.

Exemplo 1.4 Suponha que E é um espaço métrico separável e seja $D \subset E$ um subconjunto denso. Então a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$ é também gerada pela família $\mathcal{D}$ das bolas centradas em D com raio racional pois todo aberto é uma união enumerável dessas bolas. É imediato que

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{D}).$$

Sejam $(E, \mathcal{E})$ e $(G, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : E \rightarrow G$ é dita mensurável se, para todo $A \in \mathcal{G}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$.

Sejam $(E, \mathcal{E})$ e $(G, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : E \rightarrow G$ é dita mensurável se, para todo $A \in \mathcal{G}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$.

É imediato que se g é mensurável de $(E, \mathcal{E})$ para $(G, \mathcal{G})$ e h é mensurável de $(G, \mathcal{G})$ para $(H, \mathcal{H})$ então $h \circ g$ é mensurável de $(E, \mathcal{E})$ para $(H, \mathcal{H})$.

Critério útil (Observação 1.5)

Para que f seja mensurável basta que $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ para todo $A \in \hat{\mathcal{E}}$, onde $\hat{\mathcal{E}} \subset \mathcal{G}$ é tal que $\sigma(\hat{\mathcal{E}}) = \mathcal{G}$.

Critério útil (Observação 1.5)

Para que f seja mensurável basta que $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ para todo $A \in \hat{\mathcal{E}}$, onde $\hat{\mathcal{E}} \subset \mathcal{G}$ é tal que $\sigma(\hat{\mathcal{E}}) = \mathcal{G}$.

De fato, a classe $\tilde{\mathcal{G}}$ dos conjuntos $A \subset G$ tais que $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ é uma σ -álgebra. Como $\tilde{\mathcal{G}}$ contém a classe $\hat{\mathcal{E}}$, também contém $\mathcal{G}$. Assim,

$$\mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{G}}.$$

Portanto, para qualquer $A \in \mathcal{G}$, tem-se que $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$

Se o espaço de chegada é $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}^+, \mathbb{R}^d, \mathbb{C}$, sempre consideraremos que ele está munido da respectiva σ -álgebra de Borel.

Aqui $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Para que uma função numérica (i.e. $\overline{\mathbb{R}}$ -valorada) seja mensurável basta que, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\} = f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{E}$ já que esta família gera a sigma-álgebra de Borel.

Supremo, ínfimo e limites

Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções numéricas mensuráveis e $h = \sup_n f_n$, então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$[h \leq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\},$$

logo $\{h \leq a\}$ é mensurável.

Supremo, ínfimo e limites

Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções numéricas mensuráveis e $h = \sup_n f_n$, então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$[h \leq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\},$$

logo $\{h \leq a\}$ é mensurável.

Da mesma forma, se $g = \inf_n f_n$, então

$$[g \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\}.$$

Como $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \sup_{k \geq n} f_k$ e $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \inf_{k \geq n} f_k$, se as f_n são mensuráveis, então os limites superior e inferior também o são.

Observação: Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \rightarrow f$ pontualmente, então f é mensurável.

Combinações de funções mensuráveis

Se $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são mensuráveis, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ também o são. Em particular,

$$f^+ = f \vee 0 \quad \text{e} \quad f^- = -f \vee 0$$

são mensuráveis. f^+ e f^- são as partes positiva e negativa de f e temos

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Funções a valores em $\mathbb{R}^2$

Se f_1, f_2 são mensuráveis, então $f = (f_1, f_2)$ assumindo valores em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ é mensurável. Lembre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{R})$ onde $\mathcal{R}$ são os retângulos do plano

A soma $(x, y) \mapsto x + y$ é contínua, logo mensurável. Segue que $f_1 + f_2$ é mensurável. De fato $f_1 + f_2$ é a composição de $f = (f_1, f_2)$ e de $(x, y) \mapsto x + y$.

Analogamente para produto e quociente (se definido).

Função indicadora e funções elementares

Se $A \subset E$, a função indicadora de A , denotada 1_A , é a função que vale 1 em A e 0 em A^c . Se $A \in \mathcal{E}$, então 1_A é mensurável.

Uma função $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ é elementar se é da forma $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$ com $A_k \in \mathcal{E}$ e $a_k \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.6 Toda função mensurável positiva f é o limite de uma sequência crescente de funções elementares positivas.

Proposição 1.6 Toda função mensurável positiva f é o limite de uma sequência crescente de funções elementares positivas.

Prova: Considere

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}}(x) + n 1_{\{f(x) \geq n\}}.$$

A sequência $(f_n)_n$ é crescente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

σ -álgebra gerada por uma função

Seja f uma aplicação de E para outro espaço mensurável $(G, \mathcal{F})$. Denotamos por $\sigma(f)$ a σ -álgebra gerada por f , i.e. a menor σ -álgebra em E tal que $f : (E, \sigma(f)) \rightarrow (G, \mathcal{F})$ seja mensurável.

Pode-se verificar que a família $\mathcal{F}_f = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{F}\}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de E , logo coincide com $\sigma(f)$.

De forma mais geral, se $f_i : E \rightarrow (G, \mathcal{G})$ então $\sigma(f_i, i \in I)$ é a menor σ -álgebra em E tal que todas as f_i sejam mensuráveis.

Proposição 1.7 (Critério de Doob)

Seja f uma aplicação de E para $(G, \mathcal{G})$ e $h : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então h é $\sigma(f)$ -mensurável se e somente se existe uma função $\mathcal{G}$ -mensurável $g : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$h = g \circ f.$$

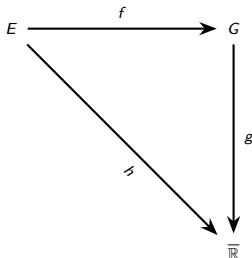


Figura: Existência de g tal que o diagrama comute.