

A 02. Uma (rápida) revisão: Noções elementares da Teoria da Medida (cont.)

Cristian Coletti

Primeiro quaudrimestre de 2026

Prova: É óbvio que se $h = g \circ f$ com g mensurável, então h é $\sigma(f)$ -mensurável, sendo composição de aplicações mensuráveis.

Prova: É óbvio que se $h = g \circ f$ com g mensurável, então h é $\sigma(f)$ -mensurável, sendo composição de aplicações mensuráveis.

Reciprocamente, assumamos primeiro que h é $\sigma(f)$ -mensurável, positiva e elementar. Então h é da forma

$$h = \sum_{k=1}^n a_k 1_{B_k}$$

com $B_k \in \sigma(f)$ e portanto $B_k = f^{-1}(A_k)$ para algum $A_k \in \mathcal{G}$.

Critério de Doob - Prova (elementar)

Como $1_{B_k} = 1_{f^{-1}(A_k)} = 1_{A_k} \circ f$, podemos escrever $h = g \circ f$ com $g = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$.

Agora, abandonemos a suposição de que h é elementar e assumamos h positiva e $\sigma(f)$ -mensurável.

Então $h = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow h_n$ para uma sequência crescente $(h_n)_n$ de funções positivas elementares (Proposição 1.6).

Critério de Doob - Prova (limite)

Graças à primeira parte da prova, h_n é da forma

$$h_n = g_n \circ f$$

com g_n positiva e $\mathcal{G}$ -mensurável.

Deduzimos que $h = g \circ f$ com $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, que é uma função positiva $\mathcal{G}$ -mensurável.

Critério de Doob - Prova (caso geral)

Seja agora h uma aplicação $\sigma(f)$ -mensurável (não necessariamente positiva). Então,

$$h = h^+ - h^-$$

e sabemos que podemos escrever

$$h^+ = g^+ \circ f$$

e

$$h^- = g^- \circ f$$

para algumas funções $\mathcal{G}$ -mensuráveis positivas g^+, g^- .

Critério de Doob - Prova (conclusão)

A função h sendo $\sigma(f)$ -mensurável, temos $\{h \geq 0\} = f^{-1}(A_1)$ e $\{h < 0\} = f^{-1}(A_2)$ para alguns $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$.

Critério de Doob - Prova (conclusão)

A função h sendo $\sigma(f)$ -mensurável, temos $\{h \geq 0\} = f^{-1}(A_1)$ e $\{h < 0\} = f^{-1}(A_2)$ para alguns $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$.

Portanto $h = g \circ f$ com $g = g^+ 1_{A_1} - g^- 1_{A_2}$.

Critério de Doob - Prova (conclusão)

A função h sendo $\sigma(f)$ -mensurável, temos $\{h \geq 0\} = f^{-1}(A_1)$ e $\{h < 0\} = f^{-1}(A_2)$ para alguns $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$.

Portanto $h = g \circ f$ com $g = g^+ 1_{A_1} - g^- 1_{A_2}$.

Não há perigo de encontrar uma forma $+\infty - \infty$ pois os conjuntos A_1, A_2 são disjuntos.

Seja $(E, \mathcal{G})$ um espaço mensurável.

Definição 1.8 Uma medida em $(E, \mathcal{G})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (pode também tomar o valor $+\infty$) tal que

Seja $(E, \mathcal{G})$ um espaço mensurável.

Definição 1.8 Uma medida em $(E, \mathcal{G})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (pode também tomar o valor $+\infty$) tal que

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

Seja $(E, \mathcal{G})$ um espaço mensurável.

Definição 1.8 Uma medida em $(E, \mathcal{G})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (pode também tomar o valor $+\infty$) tal que

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) para toda sequência $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ de conjuntos disjuntos dois a dois

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Seja $(E, \mathcal{G})$ um espaço mensurável.

Definição 1.8 Uma medida em $(E, \mathcal{G})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (pode também tomar o valor $+\infty$) tal que

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) para toda sequência $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ de conjuntos disjuntos dois a dois

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A terna $(E, \mathcal{G}, \mu)$ é um espaço de medida.

Se $E = \bigcup_n E_n$ para $E_n \in \mathcal{G}$ com $\mu(E_n) < +\infty$, μ é dita σ -finita.

Se $\mu(E) < +\infty$, μ é dita finita.

Se $\mu(E) = 1$, μ é uma probabilidade, ou medida de probabilidade.

Observação 1.10

(a) Se $A, B \in \mathcal{G}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Pois A e $B \cap A^c$ são disjuntos e sua união é B . Logo,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A).$$

(b) Se $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ é uma sequência crescente para A , i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ e $A = \bigcup_n A_n$, então $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Propriedades de uma medida (cont.)

(c) Se $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ é uma sequência decrescente para A e se, para algum n_0 , $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, então $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Em geral, uma medida não passa necessariamente ao limite ao longo de sequências decrescentes (veremos exemplos). A condição $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ é sempre satisfeita se μ é finita.

Proposição 1.11 (Cr terio de Carathéodory) Sejam μ, ν medidas no espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ e seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ uma classe de conjuntos estável para interseções finitas e tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Suponha que

- Para todo $A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) = \nu(A)$;
- Existe uma sequência crescente $(E_n)_n \subset \mathcal{C}$ tal que $E = \bigcup_n E_n$ e $\mu(E_n) < +\infty$ (logo também $\nu(E_n) < +\infty$) para todo n .

Então $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$.

Prova (medidas finitas)

Assuma primeiro que μ e ν são finitas. Seja

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{E}, \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Verifique que $\mathcal{M}$ é uma classe monótona:

- $E \in \mathcal{M}$.
- Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subset B$, então $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
- Se $(A_n)_n \subset \mathcal{M}$ é crescente e $A = \bigcup_n A_n$, então $A \in \mathcal{M}$.

Pelo Teorema da Classe Monótona, $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.

Prova (caso geral)

Para o caso geral (medidas não necessariamente finitas), defina, para $A \in \mathcal{E}$,

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n), \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n).$$

μ_n, ν_n são medidas finitas que coincidem em $\mathcal{C}$, logo em $\mathcal{E}$. Para $A \in \mathcal{E}$, como $A \cap E_n \uparrow A$, temos

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap E_n) = \nu(A).$$

Teorema 1.13 (Teorema de Extensão de Carathéodory)

Seja μ uma medida em uma álgebra $\mathcal{A}$. Então μ pode ser estendida a uma medida em $\sigma(\mathcal{A})$. Além disso, se μ é σ -finita, esta extensão é única.

Uma medida de Borel em um espaço topológico E é uma medida em $(E, \mathcal{B}(E))$ tal que $\mu(K) < +\infty$ para todo compacto $K \subset E$.

Consideremos medidas de Borel em $\mathbb{R}$. Primeiro observemos que a classe $\mathcal{C} = \{(a, b], -\infty < a < b < +\infty\}$ (intervalos semiabertos) é estável para interseções finitas e $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Função de distribuição

Dada uma medida de Borel μ em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, defina $F(0) = 0$ e

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & \text{se } x > 0 \\ -\mu((x, 0]) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Então F é contínua à direita, crescente, e

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Uma F assim é uma função de distribuição (f.d.) de μ .

Teorema 1.14 Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua à direita. Então existe uma única medida de Borel μ em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que, para todo $a < b$, $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$.

Se escolhermos $F(x) = x$, obtemos a medida de Lebesgue λ em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda(I) = |I| = b - a$ para todo intervalo $I = [a, b[$.

Um subconjunto $A \in \mathcal{E}$ é dito negligível se $\mu(A) = 0$. Dizemos que uma propriedade é verdadeira **quase sempre (q.s.)** se é verdadeira fora de um conjunto negligenciável.

Observação 1.15 Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções mensuráveis reais tal que $f_n \rightarrow f$ q.s., então existe pelo menos uma função mensurável que é o limite q.s. de $(f_n)_n$.

Seja N o conjunto negligenciável fora do qual a convergência ocorre e defina $\tilde{f}_n = f_n 1_{N^c}$.

Então $\tilde{f}_n$ são mensuráveis e convergem em todo lugar para $\tilde{f} := f 1_{N^c}$, que é portanto mensurável.