

A 03. Uma (rápida) revisão. Noções elementares da Teoria da Medida (cont.)

Cristian Coletti

Primeiro quadrimestre de 2026

Seja $(E, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida. Iremos definir a integral com respeito a μ . Estaremos mais interessados nas ideias e ferramentas, omitindo provas mais técnicas.

Integral de funções positivas elementares

Definamos primeiro a integral em relação a μ de uma função mensurável $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. Se f é positiva elementar, então $f = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$, com $A_k \in \mathcal{E}$, $a_k \geq 0$, e definimos

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k).$$

Este número (que pode ser $+\infty$) não depende da representação de f .

Propriedades para funções elementares

Se f, g são positivas elementares, temos facilmente:

(a) Se $a, b > 0$, então

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

(b) Se $f \leq g$, então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Lema 1.16

Se $(f_n)_n, (g_n)_n$ são sequências crescentes de funções positivas elementares tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow g_n$, então também

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_E g_n d\mu.$$

Definição geral para funções positivas

Seja $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ mensurável positiva. Pela Proposição 1.6, existe uma sequência $(f_n)_n$ de funções positivas elementares com $f_n \uparrow f$; então a sequência $(\int f_n d\mu)_n$ é crescente. Definimos

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_E f_n d\mu. \quad (1.6)$$

Pelo Lema 1.16, este limite independe da sequência aproximante.

Tomando o limite, obtemos que, se f, g são mensuráveis positivas, então:

- Para todo $a, b > 0$,

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

- Se $f \leq g$,

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Para uma função $\mathcal{E}$ -mensurável numérica f , escrevemos a decomposição $f = f^+ - f^-$. Definimos

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

desde que pelo menos uma das quantidades $\int f^+ \, d\mu$ e $\int f^- \, d\mu$ seja finita.

- f é dita **semi-integrável inferiormente (s.i.i.)** se $\int f^- d\mu < +\infty$ (integral bem definida, pode ser $+\infty$).

Semi-integrabilidade e integrabilidade

- f é dita **semi-integrável inferiormente (s.i.i.)** se $\int f^- d\mu < +\infty$ (integral bem definida, pode ser $+\infty$).
- f é dita **semi-integrável superiormente (s.i.s.)** se $\int f^+ d\mu < +\infty$ (integral bem definida, pode ser $-\infty$).

Semi-integrabilidade e integrabilidade

- f é dita **semi-integrável inferiormente (s.i.i.)** se $\int f^- d\mu < +\infty$ (integral bem definida, pode ser $+\infty$).
- f é dita **semi-integrável superiormente (s.i.s.)** se $\int f^+ d\mu < +\infty$ (integral bem definida, pode ser $-\infty$).
- f é **integrável** se ambas f^+ e f^- têm integral finita.

- Uma função é s.i.i. se e somente se é limitada inferiormente por uma função integrável.
- Uma função positiva é sempre s.i.i.; uma negativa é sempre s.i.s.
- Além disso, f é integrável se e somente se $\int |f| d\mu < +\infty$.

Se f é semi-integrável (superior ou inferiormente), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \right| \\ &\leq \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu \\ &= \int_E |f| \, d\mu. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Se $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, $f = f_1 + if_2$, e $\int |f| d\mu < +\infty$, então f_1 e f_2 são integráveis (pois $|f_1|, |f_2| \leq |f|$). Definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + i \int_E f_2 d\mu.$$

A desigualdade (1.7) ainda vale, com $||$ significando módulo complexo.

- **Linearidade:** Se $a, b \in \mathbb{C}$ e f, g são integráveis, então $af + bg$ é integrável e

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu.$$

- **Monotonicidade:** Se f e g são reais semi-integráveis e $f \leq g$, então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Propriedades úteis (1.9)

(a) Se f é mensurável positiva e $\int f d\mu < +\infty$, então $f < +\infty$ q.s.

(b) Se f é mensurável positiva e $\int f d\mu = 0$, então $f = 0$ q.s.

Integral sobre um conjunto

Se f é positiva mensurável (resp. integrável) e $A \in \mathcal{E}$, então $f1_A$ é positiva mensurável (resp. integrável). Definimos

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f1_A \, d\mu.$$

Teorema da Convergência Monótona

Teorema 1.17 (Beppo Levi / Convergência Monótona) Seja $(f_n)_n$ uma sequência crescente de funções mensuráveis limitadas inferiormente por uma função integrável e $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow f_n$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Este teorema estende a propriedade de passagem ao limite para medidas em sequências crescentes de conjuntos.

Proposição 1.18 (Lema de Fatou)

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis limitadas inferiormente (resp. superiormente) por uma função integrável. Então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \geq \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

$$\left(\text{resp. } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \right).$$

Teorema 1.19 (Lebesgue)

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções integráveis tal que $f_n \rightarrow f$ q.s. e tal que, para todo n , $|f_n| \leq g$ para alguma função integrável g . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Corolário 1.20

Seja $(f_t)_{t \in U}$ uma família de funções integráveis, com $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto. Suponha que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_t = f$ q.s. e que, para todo $t \in U$, $|f_t| \leq g$ para alguma g integrável. Então,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int f_t d\mu = \int f d\mu.$$

Proposição 1.21 Seja $(E, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $(f(t, x), t \in I)$ uma família de funções integráveis $E \rightarrow \mathbb{C}$. Defina $\phi(t) = \int_E f(t, x) d\mu(x)$. Suponha que existe um conjunto negligenciável N tal que:

- Para $x \in N^c$, $t \mapsto f(t, x)$ é diferenciável em I ;
- Existe uma função integrável g tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$ para todo $t \in I$, $x \in N^c$.

Derivação sob o sinal de integral (conclusão)

Então ϕ é diferenciável no interior de I e

$$\phi'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x). \quad (1.8)$$

Ideia da prova: Usa-se o quociente de diferenças, o teorema do valor médio e o Teorema de Lebesgue (Corolário 1.20) para passar o limite sob a integral.

Integração de séries (caso positivo)

Corolário 1.22 Seja $(E, \mathcal{E}, \mu)$ um espaço de medida. (a) Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções mensuráveis positivas, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu. \quad (1.10)$$

Prova: As somas parciais crescem para a soma da série; use Beppo Levi.

(b) Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções mensuráveis reais tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k| d\mu < +\infty, \quad (1.11)$$

então (1.10) também vale.

Prova: Por (a), $\sum |f_k|$ é integrável. As somas parciais $|\sum_{k=1}^n f_k|$ são dominadas por $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$, que é integrável. Aplica-se Lebesgue.

Exemplo de cálculo de integral

Exemplo 1.23 Vamos calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx.$$

Lembre da expansão em série de potências $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (para $|x| < 1$), de modo que, para $x > 0$,

$$\frac{1}{1 - e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx}.$$

Cálculo (continuação)

Como $x \mapsto \frac{x}{\sinh x}$ é uma função par, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx \\&= 4 \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} xe^{-(2k+1)x} dx = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(2k+1)x} dx \\&= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

A integração termo a termo é permitida aqui, pois tudo é positivo.