

A 04. Uma (rápida) revisão: Noções elementares da Teoria da Medida

Cristian Coletti

Primeiro Quadrimestre de 2026

Denotemos por $\mathbb{E}^+$ a família de funções mensuráveis positivas. Escrevendo $I(f) = \int_E f d\mu$, a integral é um funcional $I : \mathbb{E}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. Sabemos que I goza das propriedades:

(a) (Linearidade positiva) Se $f, g \in \mathbb{E}^+$ e $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^+$,
 $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ (com $0 \cdot +\infty = 0$);

(b) Se $(f_n)_n \subset \mathbb{E}^+$ e $f_n \uparrow f$, então $I(f_n) \uparrow I(f)$ (Teorema de Beppo Levi).

Reversão do argumento

Vimos como, dada uma medida, podemos definir a integral I e que I é um funcional satisfazendo (a) e (b). Vejamos agora como reverter o argumento:

Partindo de um funcional $I : \mathbb{E}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ satisfazendo (a) e (b), iremos definir uma medida μ tal que I seja a integral em relação a μ .

Proposição 1.24

Seja $(E, \mathcal{E})$ um espaço mensurável e $I : \mathbb{E}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ um funcional com as propriedades (a) e (b). Então

$$\mu(A) := I(1_A)$$

para cada $A \in \mathcal{E}$, define uma medida em $\mathcal{E}$ e, para toda $f \in \mathbb{E}^+$

$$I(f) = \int f \, d\mu.$$

Prova de que μ é uma medida

Temos $\mu(\emptyset) = I(0) = 0$. Para a σ -aditividade: sejam $(A_n)_n \subset \mathcal{E}$ disjuntos dois a dois, com união A . Então $1_A = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ e, por (a) e (b),

$$\mu(A) = I(1_A) = I\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \sum_{k=1}^n 1_{A_k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \sum_{k=1}^n I(1_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Logo μ é uma medida.

Igualdade do funcional e da integral

Para uma função elemental positiva $f = \sum_{k=1}^m a_k 1_{A_k}$, temos

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{k=1}^m a_k \mu(A_k) = I(f).$$

Por Proposição 1.6 e propriedade (b), isso se estende a toda $f \in \mathbb{E}^+$.

Dois pontos de vista equivalentes

A teoria da medida e integração pode ser abordada de duas formas:

- 1 Construir medidas (funções de conjunto) e depois a integral (obtendo funcionais).
- 2 Construir diretamente funcionais em $\mathbb{E}^+$ com (a) e (b) e obter medidas via $\mu(A) = I(1_A)$.

São equivalentes, mas uma pode ser mais simples dependendo do contexto.

Quando integrais iguais implicam medidas iguais?

Uma questão frequente: se as integrais em relação a duas medidas μ e ν coincidem para toda função em uma classe $\mathcal{D}$ (ex.: funções contínuas), podemos deduzir $\mu = \nu$?

É útil aproximar funções indicadoras por funções "regulares". Se E é métrico e $G \subset E$ é aberto, defina

$$f_n(x) = n d(x, G^c) \wedge 1. \quad (1.12)$$

Então f_n é contínua, $f_n \uparrow 1_G$.

Proposição 1.25 (a)

Proposição 1.25 Seja E um espaço métrico localmente compacto e separável.

(a) Sejam μ, ν medidas finitas em $\mathcal{B}(E)$ tais que

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\nu \quad (1.13)$$

para toda função contínua limitada $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Então $\mu = \nu$.

Prova de (a)

Seja G aberto e f_n como em (1.12). Como $f_n \uparrow 1_G$, pelo Teorema de Beppo Levi,

$$\mu(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu = \nu(G).$$

Logo μ e ν coincidem em abertos. Tomando $f \equiv 1$, temos $\mu(E) = \nu(E)$. Pelo Critério de Carathéodory (Prop. 1.11), $\mu = \nu$.

Proposição 1.25 (b)

(b) Suponha E separável e localmente compacto, e μ, ν medidas de Borel (não necessariamente finitas).

Se (1.13) vale para toda f contínua com suporte compacto, então

$$\mu = \nu.$$

Seja G um aberto relativamente compacto. Então f_n (de (1.12)) é contínua e tem suporte compacto (contido em $\overline{G}$).

Por (1.14), $\mu(G) = \nu(G)$. Logo μ, ν coincidem na classe $\mathcal{C}$ dos abertos relativamente compactos.

Prova de (b) - conclusão

Pelo Lema 1.26 abaixo, existe uma sequência $(W_n)_n$ de abertos relativamente compactos com $W_n \uparrow E$.

Pelo Critério de Carathéodory, $\mu = \nu$ em $\sigma(\mathcal{C})$.

Todo aberto G pertence a $\sigma(\mathcal{C})$, pois $G = \bigcup_n G \cap W_n$ e $G \cap W_n$ é relativamente compacto.

Logo $\sigma(\mathcal{C})$ e $\mathcal{B}(E)$ contem todos os abertos.

Lema 1.26 Seja E um espaço métrico localmente compacto separável.

- (a) E é união enumerável de uma sequência crescente de abertos relativamente compactos. Em particular, E é σ -compacto.
- (b) Existe uma sequência crescente $(h_n)_n$ de funções contínuas com suporte compacto tal que $h_n \uparrow 1$.

Observação importante

Se E não for localmente compacto, a igualdade $\int f d\mu = \int f d\nu$ para toda f contínua com suporte compacto **não implica** $\mu = \nu$ em $\mathcal{B}(E)$.

Isso pode ocorrer, por exemplo, em espaços de Banach de dimensão infinita, que não são localmente compactos. A classe das funções contínuas com suporte compacto não é "grande o suficiente".

Exemplos importantes de medidas

- **Medida de Dirac:** Para $x \in E$, defina $\mu(A) = 1_A(x)$. Esta é uma medida em $\mathcal{P}(E)$, denotada δ_x , chamada medida de Dirac em x .
- Para esta medida $\mu(A)$ é 1 ou 0 dependendo de se $x \in A$ ou não.
- Temos

$$\int_E f d\delta_x = f(x).$$

- **Conjuntos enumeráveis:** Se E é enumerável, associe a cada $x \in E$ um $p_x \in \mathbb{R}^+$ e defina, para $A \subset E$,

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} p_x$$

Propriedades de séries positivas garantem que μ é uma medida.

- Se $p_x = 1$ para todo x , obtemos a **medida de contagem**.

- **Medidas imagem:** Sejam $(E, \mathcal{E})$ e $(G, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis, $\Phi : E \rightarrow G$ mensurável, μ medida em $(E, \mathcal{E})$. Defina ν em $(G, \mathcal{G})$ por

$$\nu(A) := \mu(\Phi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{G}. \quad (1.17)$$

ν é a **medida imagem** de μ por Φ , denotada $\Phi(\mu)$ ou $\mu \circ \Phi^{-1}$.

Proposição 1.27 Seja $g : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ mensurável positiva. Então

$$\int_G g \, d\nu = \int_E g \circ \Phi \, d\mu. \quad (1.18)$$

Uma função $g : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é integrável com respeito a ν sse $g \circ \Phi$ é integrável com respeito a μ , e (1.18) vale também nesse caso.

Medidas definidas por uma densidade

Seja μ uma medida σ -finita em $(E, \mathcal{E})$.

- **Definição** Uma função mensurável positiva f é uma **densidade** se existe uma sequência $(A_n)_n \subset \mathcal{E}$ tal que
 - $\bigcup_n A_n = E$, $\mu(A_n) < +\infty$ e
 - $f1_{A_n}$ é integrável para todo n .